Almaty Math Battles

Финальный этап

28 ноября - 1 декабря 2025

Вёрстка: Мурат Т., Лим Э., Курманкулов С.

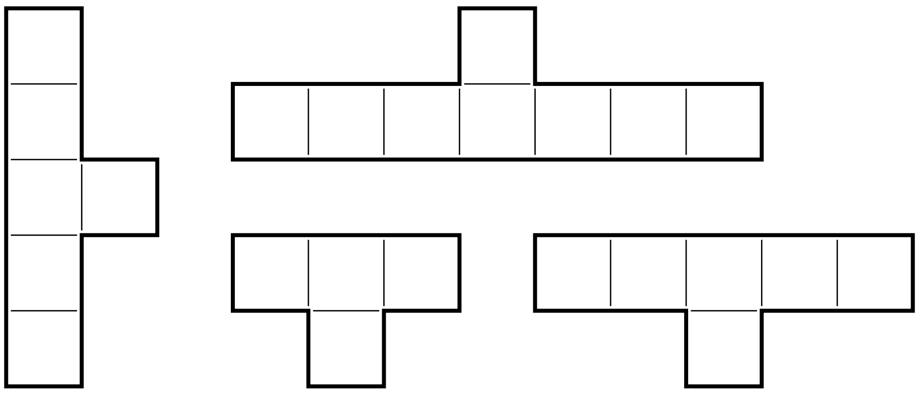
Содержание

Задача на стенку

Клетчатая связная фигура T-шка состоит из *ножки* и *шапки* и обладает следующими свойствами:

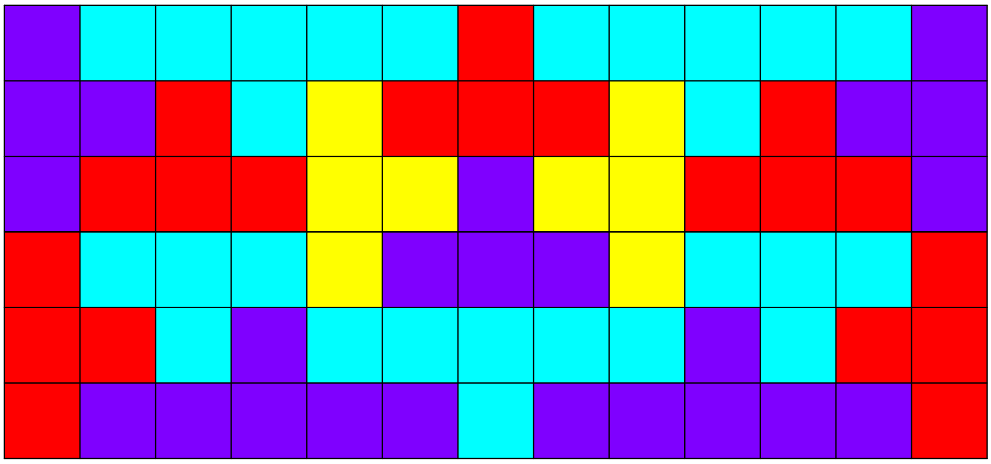
1. *ножка* является прямоугольником 1×2;
2. *шапка* является прямоугольником вида $(2k + 1) \times 1$;
3. *шапка* перпендикулярна *ножке* и пересекается с ней по одной клетке;
4. T-шка симметрична относительно *ножки*.

Ниже приведены примеры различных T-шек.



Приведите пример замощения T-шками прямоугольной доски имеющей нечётную сторону.

Существует несколько примеров, один из них:



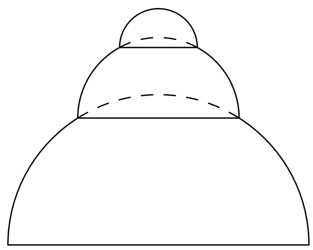
№1. Найдите все пары простых чисел (p, q), такие, что число $p^q + q^p$ является простым.

№2. На бал пришли n юношей и n девушек, у каждого человека есть рост – положительное число. И надо собрать пары для танцев такие, чтобы максимальная разность ростов в парах была самой маленькой.

Правда ли, что она всегда достигается так: девушка i-ого по возрастанию роста танцует с юношей i-го по возрастанию роста?

№3. Точка M – середина стороны BC остроугольного треугольника ABC, а точка N – середина "большей" дуги BAC описанной около него окружности. Пусть I_A – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что $\angle I_A NA = \angle I_A MC$.

№4. Несколько полусферических пузырей расположены друг над другом в порядке возрастания, как показано на рисунке. Самый большой пузырь внизу имеет радиус 1. Найдите максимальную высоту этой башни из n пузырей.



$n = 3$

№5. Какое максимальное количество различных степеней вершин может быть в дереве на n вершинах?

№6. Найдите наименьшее число N, что каждый из 101 интервалов

$$\left[N^2; (N+1)^2\right), \left[(N+1)^2; (N+2)^2\right), \ldots, \left[(N+100)^2; (N+101)^2\right)$$

содержит число делящееся на 1001.

№1. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = 1$. Докажите неравенство:

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}.$$

№2. Дан треугольник ABC с биссектрисой AL и центром вписанной окружности I. Пусть AD – диаметр описанной окружности Ω треугольника ABC. Точки E и G лежат на Ω и удовлетворяют условиям:

$$DI = DE = DG.$$

Докажите, что точки E, G и L лежат на одной прямой.

№3. Дано натуральное число $N \geq 4$. Может ли шахматный конь начать в какой-то клетке доски $4 \times N$, обойти все клетки ровно по одному разу и вернуться в изначальную клетку?

№4. Дано натуральное a. Верно ли, что среди любых a подряд идущих натуральных чисел можно

(a) выбрать два, произведение которых делится на ab, где $a > b$?

(b) выбрать три, произведение которых делится на abc, где $a > b > c$?

№5. В остроугольном треугольнике ABC точка E является серединой меньшей дуги AB. На описанной окружности треугольника ABC взяты точки M и L такие, что угол $\angle MBC = \angle ABE$ и $\angle BAL = \angle EAB$ и точки M и L лежат в другой полуплоскости относительно прямой BC чем точка A.

Пусть AL и BM пересекаются в точке F. А касательная к описанной окружности ABC в точке B пересекает AC в точке R. Докажите, что точки R, E и F лежат на одной прямой.

№6. Определим последовательность следующим образом:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 5, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Найдите все натуральные m, n, k, такие что $a_m^2 + a_n^2 + a_k^2$ является членом этой последовательности.

ALMATY MATH BATTLES
JL | Тур 2 | RU
29 ноября 2025

№1. Докажите, что количество разбиений доски $2n \times 2n$ на доминошки четное.

№2. Назовем число близнецом если оно состоит из двух одинаковых блоков цифр идущих подряд (например, 20252025 является числом близнецом).

Существует ли близнец, который является полным квадратом?

№3. Докажите, что для всех положительных a, b, c, выполняется

$$\frac{a^2}{4a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+4b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+4c^2}\le\frac{1}{2}.$$

№4. Дан треугольник ABC $(AB > AC)$ и вписанная окружность с центром I касается BC в точке D. Пусть точка P это точка симметричная точке C относительно точки D, а точка Q это точка симметричная точке B относительно точки D. IP пересекает AB в точке T, IQ пересекает AC в точке S.

Докажите, что ST это касательная к вписанной окружности.

№5. Докажите, что для всех простых $p > 5$ выполняется сравнение:

$$\left(p^2\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k}-1\right)^2\equiv 1+p^3\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k^2}\pmod{p^6}.$$

№6. Рома живет в Старой Зеландии, в которой некоторые города соединены (возможно несколько дорог между одной и той же парой городов) непересекающимися двухсторонними дорогами.

Представим город как круг, и входы/выходы как точки на его окружности.

Известно, что он может обойти все дороги пройдя по каждой ровно один раз. Докажите, что он может обойти все дороги так, чтобы его путь не самопересекался внутри городов.

№1. В клетках таблицы $a \times b$ написаны числа от 1 до m. Докажите, что из неё можно вырезать несколько связных клетчатых фигурок, так чтобы сумма чисел в каждой фигурке делилась на m и всего клеток было вырезано не менее $\left\lfloor \frac{ab}{m} \right\rfloor$ фигур.

№2. Натуральные числа a, b, c таковы, что:

$$(a+b+c) \mid (ab+bc+ca) \mid abc.$$

Какое наименьшее значение может принимать $\gcd(a,b,c)$?

№3. Дано множество

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{2^n} \mid x_i = \pm 1\}.$$

Операцией называется замена:

$$\{x_1, \ldots, x_{2^n}\} \quad \to \quad \{x_1x_2, \ldots, x_{2^n}x_{2^n+1}\} \qquad (x_{2^n+i} = x_i).$$

Докажите что через конечное количество операций множество будет состоять только из единиц (то есть из $+1$).

№4. На катетах AB, AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки C_1, B_1 так, что середина B_1C_1 равноудалена от B и C. Чевианы BB_1, CC_1 пересекаются в точке P и пересекают окружность (ABC) в точках B_2, C_2. На окружности (ABC) выбрана точка Q так, что $AQ \perp PQ$. Луч QP пересекает отрезок BC в точке R.

Докажите, что окружность (B_2C_2R) проходит через середину BC.

№5. Даны n карточек на которых записаны числа от 1 до n, изначально они расположены в возрастающем порядке. На каждом ходу можно выбрать некоторые из них и не меняя их порядка перенести их в левую часть (например $1\underline{2}3\underline{45}6 \to 245136$).

Каково минимальное количество ходов нужно сделать чтобы все карточки стояли в убывающем порядке?

№6. Дано простое $p > 5$ и натуральные $x, y < p$. Определим последовательность $\{a_i\}$ как $a_1 = a_2 = 1$ и для всех $n \geq 3$ определим a_n как остаток от деления $x \cdot a_{n-2} + y \cdot a_{n-1}$ на p.

(То есть $x \cdot a_{n-2} + y \cdot a_{n-1} \equiv a_n \pmod{p}$.)

Назовем пару (x, y) *красивой*, если $(a_k, a_{k+1}) \neq (1,1)$ для всех $2 < k < p^2$. Докажите, что количество *красивых* пар кратно 4.

№1. Действительное число α такое, что

$$\lfloor F_n\alpha \rfloor = F_n \lfloor \alpha \rfloor$$

для всех F_n – n-ное число Фибоначчи.

Докажите, что α – целое.

$(F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.)$

№2. На доске выписаны числа от 1 до 100. Можно ли их разбить на пары так, чтобы в каждой паре сумма чисел делила сумму их квадратов?

№3. Существует ли неравнобедренный треугольник с целыми координатами такой, что центры его вписанной, описанной, вневписанных окружностей, а так же ортоцентр имеют целые координаты?

№4. Дан граф на n вершинах, в котором между любыми двумя различными вершинами существует путь длиной 2.

Каково минимальное количество рёбер в этом графе (в качестве функции от n)?

№1. Дан собранный кубик Рубика $3\times3\times3$. Петя сначала определяет последовательность из нескольких ходов, а Вася раз за разом повторяет эту последовательность ходов.

Докажите, что в какой-то момент Вася обратно получит собранный кубик Рубика.

№2. Дано натуральное число n и натуральные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_k (k не фиксировано) такие, что $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$.

Найдите наибольшее возможное значение $x_1 x_2 \ldots x_k$.

№3. Касательные в точках A и B к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке F. A_1 и B_1 – середины сторон BC и AC соответственно. Описанные окружности треугольников FAB_1 и FBA_1 пересекаются в точке L. Отрезок FL пересекает сторону AB в точке K. Докажите, что L, A_1, B_1 и K лежат на одной окружности.

№4. Числа x и n – натуральные, и число

$$\sqrt{\frac{x^2(n+1)-2}{n}}$$

является целым. Докажите, что $n = 1$.

ALMATY MATH BATTLES

JL | Тур 4 | RU

30 ноября 2025

№1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Пусть точки D_b и D_c точки симметричные точке D относительно сторон AB и AC соответственно. Пусть прямые CD_c и BD_b пересекаются в точке R. И точка M – середина отрезка D_bD_c.

Докажите, что точки A, M, R коллинеарны.

№2. Найдите такое натуральное число n, для которого количество пар натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих неравенствам

$$x^2 \leq y < n^2,$$

равно 444.

№3. Для данного связного взвешенного графа с различными весами на всех ребрах докажите, что существует единственный подграф-дерево (минимальное остовное дерево) с наименьшей возможной суммой весов.

№4. Дано нечетное натуральное число n. Рассмотрим все такие натуральные числа a, не превосходящие n, что $a^2 - 1$ делится на n. Докажите, что их количество – степень двойки.

№5. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 60° и $AB < AC$. Пусть I – центр его вписанной окружности. Прямая перпендикулярная CI проведённая из точки I пересекает прямые AB и BC в точках Y и P соответственно. Также прямая перпендикулярная BI проведённая из точки I пересекает прямые AC и BC в точках Z и Q соответственно. Описанная окружность треугольника AYZ вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке R.

Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и PQR касаются.

№6. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c + ab + bc + ac \leq 3abc$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2 + b} + \frac{1}{b^2 + c} + \frac{1}{c^2 + a} \leq \frac{3}{4}.$$

№1. Найдите все пары натуральных чисел m, n таких, что $m > 1$ и $\dfrac{(n!+1)}{(m^2-1)}$ – точный квадрат.

№2. Доску $n \times n$, покрасили в 2 цвета – красный и синий. Во все клетки синего цвета записали общее количество красных клеток в одной строке и в одном столбце с данной клеткой. Найдите максимально возможную сумму чисел в синих клетках.

№3. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Прямые AD и BC пересекаются в точке Q, а диагонали AC и BD – в точке P. Точки M и N – середины отрезков AD и BC соответственно. MN пересекает AC и BD в точках S и R соответственно.

Докажите, что описанные окружности MQN и RPS касаются.

№4. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Найдите наибольшую действительную константу C, для которой выполнено неравенство:

$$\frac{1}{a\sqrt{c^2+1}} + \frac{1}{b\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{c\sqrt{b^2+1}} > C.$$

№5. Дано простое $p > 3$ и $\frac{p+3}{2}$ целых чисел. Докажите, что среди них, найдутся различные m, n, такие что $m^2 + mn - 2n^2$ делится на p.

№6. Акежан и Батырхан хотят совершить круговое путешествие по Гонконгу, что значит что они хотят посетить каждый населенный пункт ровно один раз (это также значит, что они не возвращаются в изначальную точку, а также необязательно начинают из одной точки).

Акежан получил престижную стажировку, поэтому всегда выбирает самую дорогую поездку туда где еще не был (если таких несколько, то он выбирает любую).

Батырхану задерживают стипендию, поэтому он выбирает самый дешевый путь (если таких несколько, то выбирается любой).

Возможно ли, что Акежан потратит меньше Батырхана за все путешествие?

№1. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2+b^2+2c}+\frac{1}{b^2+c^2+2a}+\frac{1}{c^2+a^2+2b}\leq\frac{3}{4}.$$

№2. В остроугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен $60°$. Пусть H – точка пересечения высот $\triangle ABC$, а точка D такова, что $ABDC$ – параллелограмм . Обозначим за M середину дуги BC описанной окружности $\triangle ABC$, не содержащей точку A.

Докажите, что точки H, M и D лежат на одной прямой.

№3. Назар очень любит две вещи – складывать много чисел и само число 2025. Ему дана бесконечная последовательность натуральных чисел. Докажите, что он может выбрать более чем 2025 последовательных членов этой последовательности, что их сумма будет кратна 2025.

№4. Дано натуральное n и положительное r.

На координатной плоскости в точке $(0, 0)$ стоит фишка. Игроки A и B играют в игру:

За ход A выбирает число $0 \leq d \leq 1$, после чего B выбирает одно из направлений (вверх, вниз, влево, вправо) и двигает фишку на расстояние d в выбранном направлении.

Среди каждых n последовательных ходов B должен выбрать каждое направление хотя бы один раз. Игрок A побеждает, если фишка окажется на расстоянии хотя бы r от начальной точки.

Может ли A гарантировать себе победу, независимо от выборов B?

№5. Для многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ верно что

$$n \nmid P_k(0) = P\underbrace{(P(\ldots(}_{k}0\underbrace{)\ldots))}_{k} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Докажите что существуют целые $0 \leq a < b \leq n-1$, что

$$n \mid P(b) - P(a).$$

№6. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, а точка I_A – центр вневписанной окружности, касающейся продолжений сторон AB и AC и стороны BC. Прямая, перпендикулярная OI_A в точке I_A, пересекает прямую BC в точке X, а внешнюю биссектрису угла BAC – в точке Y.

В каком отношении точка I_A делит отрезок XY?

ALMATY MATH BATTLES
SL | Тур 5 | RU
30 ноября 2025

№1. Дан треугольник ABC и описанная около него окружность ω. Касательные к ω в точках B и C пересекаются в точке T. Пусть середины отрезков AC, AB и BC это E, F и D соответственно. Пусть EF пересекает ω в точках X и Y. Обозначим угол $\angle XTY$ за γ, угол $\angle XDY$ за α и угол $\angle XAY$ за β. Докажите, что

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 360^\circ.$$

№2. Строго убывающая функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такова, что для всех положительных x выполняется равенство:

$$f(1 + x) + f(1 + f(x)) = 1.$$

Докажите, что $f(1) = 1$.

№3. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, p), удовлетворяющие следующим условиям: $3^a p + 1 = 10^b$, а также p – простое число, в десятичной записи которого есть две различные цифры.

№4. Икар летит на восковых крыльях сделанных ему Дедалом. Каждую секунду он либо махает крыльями и поднимается на 1 метр вверх, либо не делает ничего и падает на 1 метр вниз. Чтобы его крылья не расплавились Дедал сказал ему не летать выше k метров над землей.

Икар хочет полетать $2n$ секунд, сколько существует возможных путей полета если

(a) $k = 2$;

(b) $k = 3$?

(Икар может в процессе полета находится на земле, но сразу же после этого должен подняться.)

№5. Даны действительные числа $x \geq y \geq z \geq t > 0$, для которых выполняется равенство:

$$xyz = t\sqrt{xyzt} + (x - t)(y - t)(z - t).$$

Докажите, что $x = y = z = t$.

№6. Дан остроугольный треугольник ABC. Касательная в точке A пересекает прямую BC в точке S. Пусть H_b и H_c это основания высот из вершин B и C соответственно. Прямые проходящие через A параллельно CH_c и BH_b пересекают BH_b и CH_c в точках P и Q соответственно.

Докажите, что P, Q, S лежат на одной прямой.

ALMATY MATH BATTLES
JL | Тур 1 | RU
29 ноября 2025

Капитанский бой. Назовите баллы Юркевич Мирона на последних 4 IMO

Ответ:

Год	2022	2023	2024	2025
Балл	29	31	22	34

Капитан с меньшим квадратичным отклонением побеждает

$$(x_1 - 29)^2 + (x_2 - 31)^2 + (x_3 - 22)^2 + (x_4 - 34)^2$$

№1. Найдите все пары простых чисел (p, q), такие, что число $p^q + q^p$ является простым.

Proposed by Shturman Arseniy, Russia

Ответ: $(p, q) = (2, 3)$, $(3, 2)$

Пусть $p^q + q^p = r$. Если p и q – нечётные, тогда r чётное следовательно $r = 2$, следовательно $p = q = 1$. Противоречие. Значит, одно из чисел p, q равняется двум. БОО $q = 2$, поэтому $p > 2$ или же $p^2 + 2^p = r$.

Если $p > 3$, тогда верно следующее:

$$\left.\begin{aligned} p^2 &\equiv 1 \pmod 3 \\ 2 \nmid p \Rightarrow 2^p &\equiv 2 \pmod 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p^2 + 2^p \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow\Leftarrow$$

Значит, $p = 3$. Нетрудно проверить, что пары $(3, 2)$ и $(2, 3)$ подходят.

№2. На бал пришли n юношей и n девушек, у каждого человека есть рост – положительное число. И надо собрать пары для танцев такие, чтобы максимальная разность ростов в парах была самой маленькой.

Правда ли, что она всегда достигается так: девушка i-ого по возрастанию роста танцует с юношей i-го по возрастанию роста?

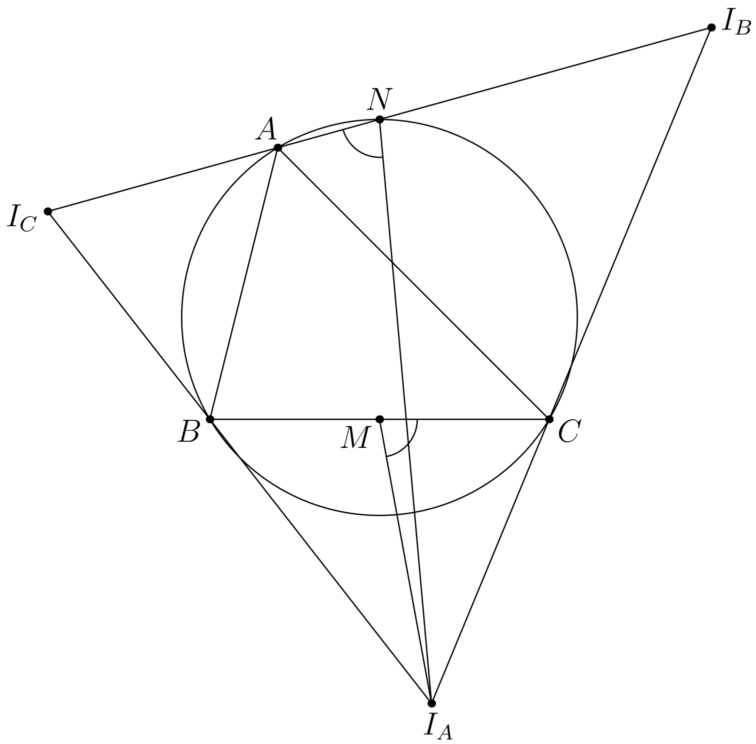
Proposed by Frantsuzov Tseren, Russia

Пойдём от противного, выберем такое разделение, что максимальная разность ростов минимальна, если таких несколько то выберем ту, в которой меньше всего инверсий (пар (a_i, b_i) и (a_j, b_j), где $a_i > a_j$ и $b_i < b_j$).

Так как мы действуем от противного, то у нас есть хотя-бы одна инверсия, пусть это пары (a_i, b_i) и (a_j, b_j). Заметим, что при замене пар на (a_i, b_j) и (a_j, b_i), ответ не увеличивается, но количество инверсий уменьшается – противоречие, значит что инверсий нет – значит девушка i-ого по возрастанию роста танцует с юношей i-го по возрастанию роста.

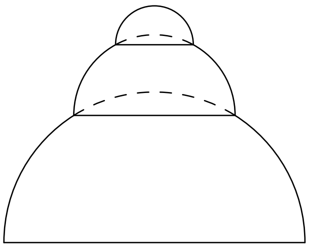
№3. Точка M – середина стороны BC остроугольного треугольника ABC, а точка N – середина "большей" дуги BAC описанной около него окружности. Пусть I_A – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что $\angle I_ANA = \angle I_AMC$.

Proposed by Bolat Yerkebulan, Kazakhstan



Пусть I_B и I_C — центры других двух вневписанных окружностей. Заметим, что $\angle I_AI_BI_C = \angle CI_BA = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\angle A}{2}) - (90^\circ - \frac{\angle C}{2}) = 90^\circ - \frac{\angle B}{2} = \angle I_ABC$, откуда следует, что треугольники $I_AI_BI_C$ и I_ABC подобны по двум углам. По внешней лемме о трезубце, $NI_C = NI_B = NB = NC$. В частности, N — середина отрезка I_BI_C. Осталось заметить, что углы I_ANA и I_AMC — соответственные в подобных треугольниках $I_AI_BI_C$ и I_ABC.

№4. Несколько полусферических пузырей расположены друг над другом в порядке возрастания, как показано на рисунке. Самый большой пузырь внизу имеет радиус 1. Найдите максимальную высоту этой башни из n пузырей.



$n = 3$

Proposed by Matniyazov Zhiyenkozha, Hong Kong

Обозначим расстояние от центра одно i-того пузыря до $i+1$-го за h_i (тут предполагаем, что $n+1$ пузырь имеет нулевой радиус и стоит на самом верху). А также радиус i-того пузыря за r_i (тут предполагаем, что $r_{n+1} = 0$).

Тогда нам нужно найти максимум $h_1 + h_2 + \cdots + h_n$.

По Теореме Пифагора легко понять, что $h_i^2 = r_i^2 - r_{i+1}^2$. Тогда

$$h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2 = r_1^2 - r_2^2 + r_2^2 - r_3^2 + \cdots + r_n^2 - r_{n+1}^2 = r_1^2 - r_{n+1}^2 = 1.$$

По неравенству QM–AM имеем

$$\sqrt{\frac{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}{n}} \geq \frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}{n}.$$

Тогда максимум $h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ – это $\sqrt{n}$. Причём равенство достигается при $r_i = \sqrt{\frac{n-i+1}{n}}$.

№5. Какое максимальное количество различных степеней вершин может быть в дереве на n вершинах?

Proposed by Konshin Alexey, Russia

Пусть ответ – k. Рассмотрим вершины со степенями $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (все x_i – различные), пусть они $A_{a_1}, A_{a_2}, \ldots, A_{a_k}$. Пусть a – количество рёбер соединяющих выбранные вершины. Если $a \geq k$, то данный граф составленный из вершин A_{a_i} будем иметь цикл – противоречие. Так что $a \leq k-1$.

Теперь посчитаем общее количество ребер в графе составленном из вершин A_{a_i} и их соседей.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k - a \geq 1 + 2 + \cdots + k - (k-1) = \frac{k^2+k}{2} - k + 1 = \frac{k^2-k+2}{2}$$

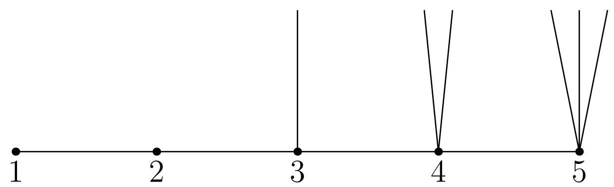
Так как всего ребер у нас $n-1$, то

$$n - 1 \geq \frac{k^2-k+2}{2} \implies 2n \geq k^2 - k + 4$$

Решив данное уравнение относительно k получим, что $k \leq \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8n-15}}{2} \right\rfloor$.

Осталось лишь привести пример:

Начнём с вершины степени 1, выберем любого её соседа и увеличим его степень до 2, выберем любого её соседа и увеличим его степень до 3, и так далее пока у нас не кончатся вершины.



№6. Найдите наименьшее число N, что каждый из 101 интервалов

$$\left[N^2; (N+1)^2\right), \left[(N+1)^2; (N+2)^2\right), \ldots, \left[(N+100)^2; (N+101)^2\right)$$

содержит число делящееся на 1001.

Proposed by Yurkevich Miron, United Kingdom

Отметим за a_{N+k} число делящееся на 1001 в $N+k$-том промежутке. Так как промежутки не пересекаются, то последовательность a_i строго возрастает.

Всего у нас в последовательности a_i 101 чисел, значит, что $(N+101)^2 - N^2 \geq a_{N+101} - a_N \geq 1001 \cdot 100$. Раскрыв скобки получаем неравенство $N \geq 446$.

Заметим, что начиная с 500, все промежутки длиной не менее 1001, так что в них гарантированно найдется хотя-бы одно число делящееся на 1001.

Рассмотрим промежутки вида $\left[(500-a)^2, (501-a)^2\right)$, для всех $a < 16$ этот промежуток содержит число $1001(250-a)$, а для $a = 16$ в данном промежутке нет числа делящегося на 1001. Значит 484^2 не является началом никакого промежутка.

Так как $N \geq 446$, то все начала промежутков должны быть больше чем 484, значит ответ – 485.

Капитанский бой. См. младшую лигу.

№1. Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c=1$. Докажите неравенство:

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\leq\frac{1}{4}.$$

Proposed by Potseluiko Andrei, Russia

Из *дробного КБШ* следует, что

$$\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

Применим его для всех дробей

$$\sum_{cyc}\frac{ab}{a+b+2c}=\sum_{cyc}\frac{ab}{(a+c)+(b+c)}\leq\sum_{cyc}\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{bc}{b+c}\right)=\frac{1}{4}\sum_{cyc}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{bc}{c+a}\right)=\frac{1}{4}\sum_{cyc}a=\frac{1}{4}.$$

№2. Дан треугольник ABC с биссектрисой AL и центром вписанной окружности I. Пусть AD – диаметр описанной окружности Ω треугольника ABC. Точки E и G лежат на Ω и удовлетворяют условиям:

$$DI=DE=DG.$$

Докажите, что точки E, G и L лежат на одной прямой.

Proposed by Mykhailo Sydorenko, United Kingdom

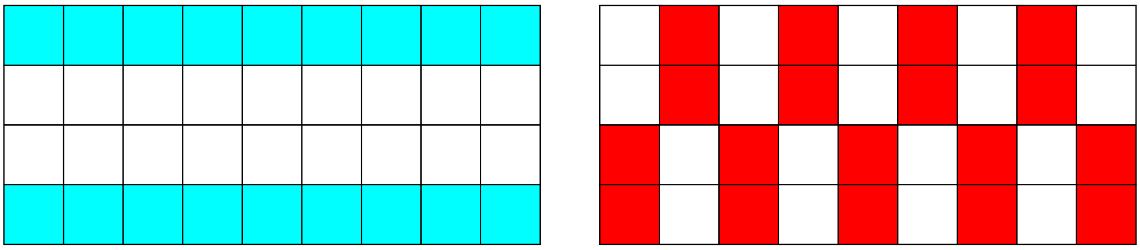
Рассмотрим точку I_a – центр вневписанной окружности касающейся стороны BC. По *Лемме о Трезубце* мы знаем, что $(IBCI_a)$. Определим точку M как середину меньшей дуги BC. $\triangle IMD=\triangle I_aMD$, так как $IM=I_aM$ и $\angle IMD=\angle I_aMD=90^\circ$ и BD – общая. Значит, что $(IEGI_a)$.

Теперь рассмотрим три окружности – $(IBCI_a)$, $(IEGI_a)$ и $(BMDC)$, и рассмотрим их попарные радикальные оси: BC, II_a, EG. По *Теореме о радикальном центре* все они пересекаются в одной точке, то есть E, G и L лежат на одной прямой.

№3. Дано натуральное число $N \geq 4$. Может ли шахматный конь начать в какой-то клетке доски $4 \times N$, обойти все клетки ровно по одному разу и вернуться в изначальную клетку?

Proposed by Ashken Ilias, Kazakhstan

Допустим можно, тогда покрасим доску двумя способами:



Заметим что из клетки синего цвета можно прыгать только в клетки белого цвета. Следовательно из белой можно прыгать только в синие, т.к. мы хотим пройти равное кол-во белых и синих.

Теперь перейдём ко второй раскраске, БОО начали в красной клетке. Заметим, что если мы находимся на первом или последнем ряду, то из красной можно прыгнуть только в красную. Теперь возьмём центральные клетки (второй и третий ряд). Из условия того, что с центральных клеток нельзя прыгать на другие центральные (из первой раскраски) выясняем, что из центральной красной можно прыгать только на красные клетки, противоречие.

№4. Дано натуральное a. Верно ли, что среди любых a подряд идущих натуральных чисел можно

(a) выбрать два, произведение которых делится на ab, где $a > b$?

(b) выбрать три, произведение которых делится на abc, где $a > b > c$?

Proposed by Yurkevich Miron, United Kingdom

(a)[4] Среди a последовательных чисел найдётся одно делящееся на a, и одно делящееся на b.

Если эти два числа различны, то перемножив их получим число делящееся на ab.

Иначе, это число делится на $[a, b] = dmn$. Где $a = dn$, $b = dm$ и $(a, b) = d$.

Среди a последовательных чисел найдётся $\left\lfloor \frac{a}{d} \right\rfloor = n$ чисел делящихся на d. Так как $a > b$, то $n > m \geq 1 \Rightarrow n \geq 2$, то есть найдётся ещё одно число делящееся на d, перемножив его с изначальным получим число делящееся на $d^2mn = ab$.

(b)[8] Рассмотрим числа $a = 11 \cdot 13 > b = 7 \cdot 13 > c = 7 \cdot 11$ и числа

$$1001k - 66, \ldots, 1001k, \ldots, 1001k + 76$$

для какого-то целого k (его выберем чуть позже). Всего тут $76 - (-66) + 1 = 143 = C$ чисел.

Ни одно данное число, за исключением $1001k$ не делится хотя-бы на два числа из набора $\{7, 11, 13\}$.

Если какие-то три числа при перемножении делятся на $7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$, то мы должны либо выбрать $1001k$, либо выбрать число делящееся на 13^2.

Можно подобрать такое k, что в промежутке от $1001k - 66$ до $1001k + 76$ нет чисел делящихся на 13^2, и само число k не делится ни на одно из простых 7, 11, 13.

№5. В остроугольном треугольнике ABC точка E является серединой меньшей дуги AB. На описанной окружности треугольника ABC взяты точки M и L такие, что угол $\angle MBC = \angle ABE$ и $\angle BAL = \angle EAB$ и точки M и L лежат в другой полуплоскости относительно прямой BC чем точка A.

Пусть AL и BM пересекаются в точке F. А касательная к описанной окружности ABC в точке B пересекает AC в точке R. Докажите, что точки R, E и F лежат на одной прямой.

Proposed by Kuznetsov Stanislav, Russia

У нас $\angle LMF = \frac{\angle ACB}{2} = \angle BCE$ и $\angle FLM = \angle ALM = \angle ABC + \frac{\angle ACB}{2} = \angle EBC$. Значит треугольник LFM подобен треугольнику BEC и $\frac{LM}{BC} = \frac{FM}{EC}$. Пусть BL пересекает MC в точке K. Тогда у нас $BLMC$ равнобокая трапеция и $\frac{KM}{KC} = \frac{LM}{BC} = \frac{FM}{EC}$. И так как у нас FM параллельно EC, K, F, E должны лежать в одной прямой. И наконец по теореме Паскаля для шестиугольника $BBMCAL$, выходит наша задача.

№6. Определим последовательность следующим образом:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 5, \quad a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Найдите все натуральные m, n, k, такие что $a_m^2 + a_n^2 + a_k^2$ является членом этой последовательности.

Proposed by Amir Sakhipov, Hong Kong

Ответ: $(m, n, k) = (1, 1, 1)$

Выберем $a_0 = 1$, чтобы мы смогли применить нашу реккурентную формулу для определения a_2.

Лемма. $a_{m+n+1} = a_m a_{n+1} + a_{m-1} a_n$; $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$

Доказательство. Докажем это индукцией по m. База $m = 0$ дана в условии. Пусть это правда $m = k$ и любого $n \in \mathbb{N}$. Предположение индукции для $m = k$ и $n \to n+1$ даёт $a_{k+n+2} = a_k a_{n+2} + a_{k-1} a_{n+1}$. Следовательно

$$a_{n+k+2} = a_k(2a_{n+1} + a_n) + a_{k-1}a_{n+1} = (2a_k + a_{k-1})a_{n+1} + a_k a_n = a_{k+1}a_{n+1} + a_k a_n \forall n \in \mathbb{N}$$

То есть оно верно и для $m = k+1$, что требовалось показать.

Утверждение 1. $a_{2n+2} = a_{n+1}^2 + a_n^2$.

Доказательство. Подставим $m \to n+1$ в лемму, тогда получим

$$a_{2n+2} = a_{n+1}^2 + a_n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Из утверждения 1:

$$a_n^2 > (2a_{n-1})^2 = 2a_{n-1}^2 + 2(2a_{n-2} + a_{n-3})^2 > 2(a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2) + (a_{n-2}^2 + a_{n-3}^2) = 2a_{2(n-1)} + a_{2n-2}$$

Вернёмся к задаче. Пусть для $m \geq n \geq k$ нашлось натуральное l, такое что

$$a_m^2 + a_n^2 + a_k^2 = a_l$$

Утверждение 2. $n \geq m - 2$

Доказательство. Допустим $n \leq m - 2$, тогда

$$a_l = a_m^2 + a_n^2 + a_k^2 \leq a_m^2 + 2a_{m-2}^2 < a_m^2 + a_{m-1}^2 = a_{2m} \Rightarrow l < 2m.$$

Значит,

$$a_{2m-1} \geq a_l \geq a_m^2 + a_n^2 + a_k^2 > 2a_{2m-2} + a_{2m-4} + a_n^2 + a_k^2$$

Значит $a_{2m-1} = a_m^2 + a_n^2 + a_k^2$. Так как $a_{2m-1} = 2a_{2m} + a_{2m-2} = 2(a_m^2 + a_{m-1}^2) + a_{m-1}^2 + a_{m-2}^2$, то: $a_m^2 + 3a_{m-1}^2 + a_{m-2}^2 = a_n^2 + a_k^2 \leq 2a_{2m-2}^2 \Rightarrow a_m^2 + 3a_{m-1}^2 \leq a_{m-2}^2$ – противоречие.

Значит $n = m$ или $n = m - 1$

Если $n = m - 1$:

$$a_l = a_{m-1}^2 + a_m^2 + a_k^2 \Rightarrow a_l = a_{2m} + a_k^2.$$

Значит

$$a_{2m} + a_{m-2}^2 \geq a_{2m} + a_k^2 = a_l = a_{2m+l-2m} = a_{2m}a_{l-2m} + a_{2m-1}a_{l-2m-1} > 2a_{2m}$$

$$\Rightarrow a_{m-2}^2 \geq a_{2m}$$

А это невозможно по утверждению 1. Противоречие.

Если $n = m$:

$$a_l = 2a_m^2 + a_k^2$$

Если $l \geq 2m+2$, то:

$$3a_m^2 \geq 2a_m^2 + a_k^2 = a_l \geq a_{2m+2} = a_{m+1}^2 + a_m^2 \Rightarrow 2a_m^2 \geq a_{m+1}^2 = (2a_m^2 + a_{m-1}^2)^2 \geq 4a_m^2$$

Противоречие. Значит $l = 2m+1$, то $a_{2m+1} = 2a_m^2 + a_k^2$

Если $a_{2m+1} = 2a_m^2 + a_k^2 \Rightarrow 2a_{2m+1} = 4a_m^2 + 2a_k^2 \Rightarrow 2a_{2m+1} + a_{2m} = 4a_m^2 + a_{2m} + 2a_k^2$ Из утверждения 1 получаем:

$$a_m^2 + a_{m+1}^2 = 4a_m^2 + a_m^2 + a_{m-1}^2 + 2a_k^2 \Rightarrow$$

$$a_{m+1}^2 = 4a_m^2 + a_{m-1}^2 + 2a_k^2 \Rightarrow$$

$$4a_m^2 + 4a_m a_{m-1} + a_{m-1}^2 = 4a_m^2 + a_{m-1}^2 + 2a_k^2 \Rightarrow$$

$$2a_m a_{m-1} = a_k^2.$$

Так как $2a_m a_{m-1} > a_{m-1}^2$ и $2a_m a_{m-1} < a_{m+1}^2$, то $a_m^2 = 2a_m a_{m-1} = a_k^2 \Rightarrow m = k$

Значит

$$a_{2m-1} = 3a_m^2 \quad 2a_m a_{m-1} = a_m^2 \Rightarrow a_m = 2a_{m-1}.$$

Отсюда находим, что $a_{m-1} = 1$. Значит $a_m = 2$ и $m = 1$.

Капитанский бой. Если А – это 1, Б – это 2, В – это 3 и так далее, то посчитайте сумму букв в "Арсен Кожабек".

Ответ:

$$(1 + 18 + 19 + 6 + 15) + (12 + 16 + 8 + 1 + 2 + 6 + 12) = \boxed{116}.$$

№1. Докажите, что количество разбиений доски $2n \times 2n$ на доминошки четное.

Proposed by Murat Timur, Kazakhstan

Рассмотрим любое разбиение, если мы отсимметричим его по главной диагонали, то мы получим новое разбиение. Причем все разбиения деляться на пары таким образом, то есть их количество четное.

№2. Назовем число близнецом если оно состоит из двух одинаковых блоков цифр идущих подряд (например, 20252025 является числом близнецом).

Существует ли близнец, который является полным квадратом?

Proposed by Yurkevich Miron, United Kingdom

Заметим, что все числа близнецы можно представить как $a \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1$ где $a < 10^k$. Если мы найдем такое число $N = 1\underbrace{00\ldots0}_{k}1$, что оно делится на p^2 для какого-то простого p, то можно взять $a = \frac{N}{p^2}$, и тогда $a < 10^k$ и $aN = \frac{N^2}{p^2}$ – квадрат.

К счастью такое число можно найти –

$$10^{11} + 1 = (10 + 1)(10^{10} - 10^9 + 10^8 - \cdots + 10 + 1)$$

$$10^{10} - 10^9 + 10^8 - \cdots + 10 + 1$$

$$\equiv (-1)^{10} - (-1)^9 + (-1)^8 - \cdots - (-1) + 1 \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 \equiv 0 \pmod{11}$$

То есть $10^{11} + 1$ делится на 11^2.

№3. Докажите, что для всех положительных a, b, c, выполняется

$$\frac{a^2}{4a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+4b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2+4c^2}\leq\frac{1}{2}.$$

Proposed by Bazarbay Miras, Kazakhstan

$$\begin{aligned}\sum\frac{2a^2}{12a^2+3b^2+3c^2}&=\sum\frac{a^2}{\frac{10a^2+2b^2+2c^2+a^2+b^2+a^2+c^2}{2}}\\&\leq\sum\frac{a^2}{5a^2+b^2+c^2+ab+ca}\\&\leq\sum\frac{a^2}{3a^2+3ab+3ca}\\&=\sum\frac{a}{3(a+b+c)}\\&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

№4. Дан треугольник ABC $(AB > AC)$ и вписанная окружность с центром I касается BC в точке D. Пусть точка P это точка симметричная точке C относительно точки D, а точка Q это точка симметричная точке B относительно точки D. IP пересекает AB в точке T, IQ пересекает AC в точке S.

Докажите, что ST это касательная к вписанной окружности.

Proposed by Shcherbatov Yaroslav, Russia

Переопределим задачу. Пусть точка S' такая точка, что это пересечение AC и касательной из точки T к вписанной окружности. Пусть IS' пересекает BC в точке Q' и касается вписанной окружности в точке H. Докажем, что $Q' = Q$. Пусть $\angle ABC = 2\alpha$ и $\angle ACB = 2\beta$ то угол $\angle TIS' = 180 - \alpha - \beta$. И так как $PD = CD$ И $ID \perp BC$ значит $\angle IPC = \beta$ и так как $\angle TIS' = 180 - \alpha - \beta$, значит $\angle IQ'P = \alpha$ значит $IB = IQ' \Rightarrow DB = DQ' \Rightarrow BP = CQ' \Rightarrow Q' = Q$.

№5. Докажите, что для всех простых $p > 5$ выполняется сравнение:

$$\left(p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} - 1\right)^2 \equiv 1 + p^3 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^6}.$$

Proposed by folklore,

Так как

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \equiv 0 \pmod{p^2},$$

левая часть выражения эквивалентна:

$$-2p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + 1 \pmod{p^6}$$

значит нам надо доказать:

$$-2p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + 1 \equiv 1 + p^3 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^6}$$

Сокращая на 1 а потом и на p^2 нам остается доказать:

$$2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} \equiv -p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{p-k}\right) \equiv -p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p}{k(p-k)} \equiv -p \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k(p-k)} \equiv - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2} \pmod{p^3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(p-k)^2} + \frac{2}{k(p-k)}\right) \equiv 0 \pmod{p^3}$$

$$\Leftrightarrow p^2 \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^2(p-k)^2} \equiv 0 \pmod{p^3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k^4} \equiv 0 \pmod{p}$$

Последнее равенство верно из-за обратных остатков.

№6. Рома живет в Старой Зеландии, в которой некоторые города соединены (возможно несколько дорог между одной и той же парой городов) непересекающимися двухсторонними дорогами.

Представим город как круг, и входы/выходы как точки на его окружности.

Известно, что он может обойти все дороги пройдя по каждой ровно один раз. Докажите, что он может обойти все дороги так, чтобы его путь не самопересекался внутри городов.

Proposed by Murat Timur, Kazakhstan

Переведем задачу на язык графов, тогда нам дан планарный граф, который можно обойти за не повторяя ребра. Тогда по критерию *обходимости* у этого графа 0 или 2 вершины с нечетной степенью. Если вершин с нечетной степенью 2 (назовем их A и B), то пусть Рома начнет свой путь в одной из них и пойдет по любой из дорог.

Его стратегия заключается в том, что в каждом встреченном городе он идет в ближайшую правую не использованную дорогу. Можно заметить, что таким образом пересечений пути внутри городов не будет. И путь закончится только когда Рома придет во второй город с нечетной степенью.

Если все ребра использованы, то задача решена. Иначе оставшийся граф разделяется на несколько планарных под-графjd, причем степень каждой вершины в данном графе будет четной. Начиная с любой вершины повторим тот же алгоритм, в данном случае путь закончится только когда Рома вернется в изначальную вершину. Повторим данный процесс пока весь граф не разделится на (путь от A до B) и несколько циклов.

Теперь будем объединять данные графы, допустим какой-то путь $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k$ и цикл $A_i = (B_1 \to B_2 \to \cdots \to B_m \to B_1) = A_i$. Тогда рассмотрим два пути:

$$A_1 \to \cdots \to A_i \to B_2 \to B_3 \to \cdots \to B_m \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots \to A_k$$

$$A_1 \to \cdots \to A_i \to B_m \to B_{m-1} \to \cdots \to B_2 \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots \to A_k$$

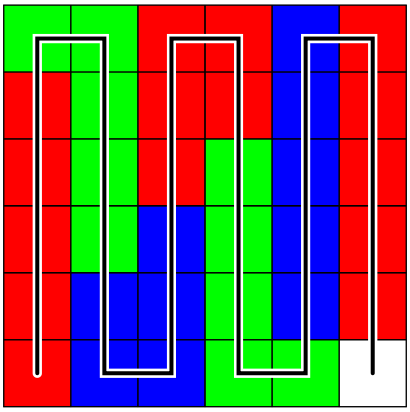
В одном из них не будут пересечений в городе A_i.

Повторив данный процесс конечное число раз, мы решим задачу.

Капитанский бой. См. младшую лигу.

№1. В клетках таблицы $a \times b$ написаны числа от 1 до m. Докажите, что из неё можно вырезать несколько связных клетчатых фигурок, так чтобы сумма чисел в каждой фигурке делилась на m и всего клеток было вырезано не менее $\left\lfloor \frac{ab}{m} \right\rfloor$ фигур.

Proposed by Pimenov Mark, Russia



$n = 6, m = 5$

Рассмотрим обход нашей таблицы. Потом начиная с первой вершины обхода будем выделять вот такие пути длины m. Будем смотреть на каждую из фигурок по отдельности.

Пусть в её первой клетке написано a_1, во второй a_2, в третий a_3, ... в m-ой a_m (клетки занумерованы в порядке их обхода). Тогда рассмотрим m сумм:

$$a_1$$
$$a_1 + a_2$$
$$a_1 + a_2 + a_3$$
$$\ldots$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m$$

Либо какая-то из них кратна m, либо по принципу Дирихле у каких-то 2 из них совпадает остаток при делении на m. Если второй случай, то рассмотрим разницу этих 2 сумм. В любом случае получаем $a_i + a_{i+1} \ldots a_j$ делится на m. Причём так как эти клетки в обходе идут подряд, то данная фигурка связная. Её и вырежем.

Тогда всего фигурок вырезано хотя бы $\left\lfloor \frac{ab}{m} \right\rfloor$ от общего числа клеток.

№2. Натуральные числа a, b, c таковы, что:

$$(a+b+c) \mid (ab+bc+ca) \mid abc.$$

Какое наименьшее значение может принимать $\gcd(a,b,c)$?

Proposed by Shturman Arseniy, Russia

Ответ: 3.

Пример: $a=b=c=3$.

Оценка: предположим противное. Пусть $\gcd(a,b,c)<3$. Пусть $p \mid (a+b+c)$. Тогда $p \mid abc$. Без ограничения общности возьмем, что $p \mid c$.

Заметим, что $p \mid (ab+bc+ca)$ значит $p \mid ab$, так как $p \mid c$. Значит, без ограничения общности $p \mid b$, откуда, так как $p \mid (a+b+c) \Rightarrow p \mid a \Rightarrow p \mid \gcd(a,b,c)$. Значит, $p \le \gcd(a,b,c) < 3 \Rightarrow p=2$. Значит, $p=2$ – единственный простой делитель числа $(a+b+c)$. Значит, $a+b+c$ – степень двойки. Пусть $a+b+c=2^k$, где $k>1$. Заметим что, числа a,b,c четны ибо $\gcd(a,b,c)=2$. Также среди чисел a,b,c есть число, сравнимое с 2 по модулю 4, ибо $\gcd(a,b,c)=2$ и $a+b+c=2^k$. $4 \mid (a+b+c) \Rightarrow$ среди чисел a,b,c ровно 2 сравнимы с 2 по модулю 4. Пусть $4 \mid a$, а числа b и c не делятся на 4. Тогда bc не делится на 8, а числа ab, ac делятся на 8. Тогда $ab+bc+ca$ не делится на 8. Тогда $a+b+c$ не делится на 8. Тогда $a+b+c=4$, тогда среди чисел a,b,c есть нечётное, противоречие.

№3. Дано множество

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{2^n} \mid x_i = \pm 1\}.$$

Операцией называется замена:

$$\{x_1, \ldots, x_{2^n}\} \quad \to \quad \{x_1x_2, \ldots, x_{2^n}x_{2^n+1}\} \qquad (x_{2^n+i} = x_i).$$

Докажите что через конечное количество операций множество будет состоять только из единиц (то есть из $+1$).

Proposed by Ashken Ilias, Kazakhstan

Назовем операцию $f(x_i) = x_ix_{i+1}$. Докажем, что $f^{2^k}(x_i) = x_ix_{i+2^k}$ индукцией, база очевидна.

Переход $k \to k+1$:

$$f^{2^{k+1}}(x_i) = f^{2^k}(x_ix_{i+2^k}) = f^{2^k}(x_i)f^{2^k}(x_{i+2^k}) = x_ix_{i+2^{k+1}}.$$

Подставив $k=n$ получаем

$$f^{2^n}(x_i) = x_ix_{i+2^n} = 1.$$

№4. На катетах AB, AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки C_1, B_1 так, что середина B_1C_1 равноудалена от B и C. Чевианы BB_1, CC_1 пересекаются в точке P и пересекают окружность (ABC) в точках B_2, C_2. На окружности (ABC) выбрана точка Q так, что $AQ \perp PQ$. Луч QP пересекает отрезок BC в точке R.

Докажите, что окружность (B_2C_2R) проходит через середину BC.

Proposed by Alexander Ruban, Aleph[1]

Середина B_1C_1 – центр описанной окружности AB_1C_1, поскольку $\angle A = 90°$. Пусть середина B_1C_1 будет точкой N.

Пусть Q' такая точка на (ABC), что Q' симметрична точке A относительно серпера к BC. И пусть точка M это середина отрезка BC

Так как N лежит на серпере к отрезку BC и точки A и Q' симметричны относительно этого серпера значит $AN = NQ'$, значит точки A, C_1, Q, B_1 лежат на одной окружности, значит $\angle C_1Q'B_1 = 90°$

Также, так как $\angle BQ'C = \angle C_1Q'B_1$, то $\angle C_1Q'B = \angle CQ'B_1$, значит по лемме об изогоналях для пар точек (C_1, B_1) и $(C,\ B)$ получаем, что $\angle AQ'C_1 = \angle PQ'B_1$, значит $\angle AQB = \angle CQP$, значит $\angle AQ'P = 90°$, значит $Q' = Q$.

Так как $AQ \parallel BC$, то $\angle QRC = 90°$, значит точки B_2, C_2, R, M лежат на одной окружности - окружности девяти точек для треугольника BPC

№5. Даны n карточек на которых записаны числа от 1 до n, изначально они расположены в возрастающем порядке. На каждом ходу можно выбрать некоторые из них и не меняя их порядка перенести их в левую часть (например $1\underline{2}3\underline{45}6 \to 245136$).

Каково минимальное количество ходов нужно сделать чтобы все карточки стояли в убывающем порядке?

Proposed by Murat Timur, Kazakhstan

Для каждого числа выпишем список всех его ходов в качестве бинарной строки (например 00110), где на i-том месте находится 1 если данное число было выбрано на i-том ходу, и 0 иначе.

Заметим, что если какие-то 2 числа имеют одинаковую последовательность, то их конечное расположение относительно друг друга будет таким же как изначально (то есть эти два числа будут в возрастающем порядке). А так как в финальном состоянии все числа должны быть в убывающем порядке, то количество различных вариантов для последовательностей ходов должно быть не меньше количества карточек, то есть $2^k \geq n \Rightarrow k \geq \lceil \log_2 n \rceil$ где k – количество сделанных ходов.

Сначала приведем пример для $n = 2^k$ за k ходов:

[1] НМИ «Алеф» — сообщество составителей уникальных авторских задач по математике https://aleph-problems.com

На каждом ходу выбираем числа на четных местах:

$$1\underline{2}3\underline{4}5\underline{6}7\underline{8}$$
$$2\underline{4}6\underline{8}1\underline{3}5\underline{7}$$
$$4\underline{8}3\underline{7}2\underline{6}1\underline{5}$$
$$87654321$$

Тогда у каждого числа x последовательность ходов будет бинарной репрезентацией числа $x-1$. Также заметим, что числа меняют свое относительное положение только тогда, когда правое число выбрано, а левое нет. Рассмотрев любые последовательные 2 числа, можно понять что они меняют свое расположение относительно друг друга лишь однажды. То есть любые 2 последовательных числа будут в убывающем порядке, а такая позиция лишь одна – от 2^k до 1.

Для чисел $2^{k-1} < n < 2^k$ будем выбирать те же числа что выбирали бы если n было бы 2^k, например:

$$1\underline{2}3\underline{4}5\underline{6}$$
$$2\underline{4}61\underline{3}5$$
$$432\underline{6}1\underline{5}$$
$$654321$$

№6. Дано простое $p > 5$ и натуральные $x, y < p$. Определим последовательность $\{a_i\}$ как $a_1 = a_2 = 1$ и для всех $n \geq 3$ определим a_n как остаток от деления $x \cdot a_{n-2} + y \cdot a_{n-1}$ на p.

(То есть $x \cdot a_{n-2} + y \cdot a_{n-1} \equiv a_n \pmod p$.)

Назовем пару (x, y) *красивой*, если $(a_k, a_{k+1}) \neq (1, 1)$ для всех $2 < k < p^2$. Докажите, что количество *красивых* пар кратно 4.

Proposed by Murat Timur, Lim Erik, Kazakhstan

Дисклеймер: здесь и далее все знаки равенства – сравнения по $\pmod p$.

Очевидно что если *красивых* пар нет для данного p, то доказывать нечего (0 кратно 4).

Теперь предполагаем что существует хотя-бы одна *красивая* пара.

Так как различных пар (a_k, a_{k+1}) конечно и из этой пары однозначно определяется как a_{k-1} так и a_{k+2}, то последовательность зацикливается. Так как различных пар (a_k, a_{k+1}) всего p^2 и пара $(0, 0)$ недостижима, то максимальная длина цикла – $p^2 - 1$. Значит что $a_{p^2} = a_{p^2+1} = 1$.

Докажем, что если (x, y) – *красивая*, то $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$ – тоже *красивая.*

Определим обратную последовательность $\{\overline{a}_i\}_{i\geq 1} = a_{p^2-i}$. Заметим, что у данной последовательности цикл такой же как и у оригинальной. Докажем, что данная последовательность тоже рекуррентная. По данной нам формуле

$$\begin{aligned}
x \cdot a_{n-2} + y \cdot a_{n-1} &= a_n \\
x \cdot \overline{a}_{p^2-n+2} + y \cdot \overline{a}_{p^2-n+1} &= \overline{a}_{p^2-n} \\
\overline{a}_{p^2-n+2} &= \frac{\overline{a}_{p^2-n} - y \cdot \overline{a}_{p^2-n+1}}{x} \\
\overline{a}_{p^2-n+2} &= \frac{1}{x} \cdot \overline{a}_{p^2-n} - \frac{y}{x} \cdot \overline{a}_{p^2-n+1} \\
\overline{a}_m &= \frac{1}{x} \cdot \overline{a}_{m-2} - \frac{y}{x} \cdot \overline{a}_{m-1}.
\end{aligned}$$

А это последовательность соответствует паре $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$.

Теперь докажем, что если (x, y) – *красивая*, то $(x, -y)$ – тоже *красивая.*

Определим рекуррентную последовательность $\{b_i\}_{i\geq 1}$ соответствующей паре $(x, -y)$, но с начальными условиями, что $b_1 = -1$, $b_2 = 1$. Докажем, что $b_k = a_k \cdot (-1)^k$.

Докажем это индукцией, база очевидна.

Переход: нужно доказать, что $b_{n+2} = a_{n+2} \cdot (-1)^{n+2}$.

Если n кратно 2, то

$$xb_n - yb_{n+1} = xa_n - y \cdot (-a_{n+1}) = xa_n + ya_{n+1} = a_{n+2}.$$

Если n не кратно 2, то

$$xb_n - yb_{n+1} = x \cdot (-a_n) - ya_{n+1} = -(xa_n + ya_{n+1}) = -a_{n+2}.$$

Теперь нужно доказать, что все 4 пары – (x, y), $(x, -y)$, $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$, $\left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$ – различные. Это будет верно если $x \neq \pm 1$ и $y \neq 0$.

То что $y \neq 0$ следует из условия. А вот над $x \neq \pm 1$ придется поработать.

Допустим, пара $(1, y)$ является *красивой*, тогда в основной последовательности встречается пара $(0, 1)$ (введём новую последовательность $\{a'_i\}_{i \geq 1}$, обладающая такой же формулой за исключением, что $a'_1 = 0$ и $a'_2 = 1$). Рассмотрим часть последовательности начинающейся с $(0, 1)$ и заканчивающейся в $(t, 0)$, где этот 0 является первым встреченным, после $(0, 1)$. Заметим, что после $(t, 0)$ идёт $(0, t)$, и часть последовательности с этого момента до следующего 0 то же самое, что и с $(0, 1)$ до $(t, 0)$, только домноженное на t, поэтому длины последовательностей, между нулями равны. Т.к. всего пар $p^2 - 1$, а нулей $p - 1$, то длина каждой такой подпоследовательности – $p + 1$.

Если мы рассмотрим последовательность, которая идёт в обратную сторону ($\{\overline{a'}_i\}_{i \geq 1}$), то она будет совпадать с последовательностью $(1, -y)$ ($\overline{b'}_i$) по свойству этой последовательности доказанной ранее $\overline{a'}_k = b'_k = a'_k \cdot (-1)^k$, т.е.

$$(a'_{p^2-p-2}, a'_{p^2-p-1}) = (\overline{a'}_{p+2}, \overline{a'}_{p+1}) = (b'_{p+2}, b'_{p+1}) = (a'_{p+2} \cdot (-1)^{p+2}, a'_{p+1} \cdot (-1)^{p+1}) = (-a'_{p+2}, a'_{p+1}) = (0$$

но так как $a'_{p+1} = a'_{p+3} = t$ получается, что $(a'_{p^2-p-2}, a'_{p^2-p-1}) = (0, t) = (a_{p+2}, a_{p+3})$ т.е. мы нашли цикл, значит всего нулей встречается 2 или же $p = 3 \Rightarrow\Leftarrow$.

Теперь случай, когда $x = -1$ делаем всё примерно одно и тоже, только $\overline{a'}_k = -b'_k = a'_k \cdot (-1)^{k+1}$ или же

$$(a'_{p^2-p-2}, a'_{p^2-p-1}) = (\overline{a'}_{p+2}, \overline{a'}_{p+1}) = (-b'_{p+2}, -b'_{p+1})$$

$$= (a'_{p+2} \cdot (-1)^{p+3}, a'_{p+1} \cdot (-1)^{p+2}) = (a'_{p+2}, -a'_{p+1}) = (0, -t)$$

$$(a'_{p^2-p-2}, a'_{p^2-p-1}) = (0, -t) = (a'_{p+2}, -a'_{p+1}) = (a'_{p+2}, a'_{p+3})$$

что также значит, что $p \leq 5$, $\Rightarrow\Leftarrow$.

Капитанский бой. Назовите самое большое простое число которое вы знаете.

№1. Действительное число α такое, что

$$\lfloor F_n\alpha \rfloor = F_n \lfloor \alpha \rfloor$$

для всех F_n – n-ное число Фибоначчи.

Докажите, что α – целое.

$(F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.)$

Proposed by Murat Timur, Kazakhstan

Пусть $\lfloor \alpha \rfloor = x$ и $\{\alpha\} = \varepsilon$. Тогда наше условие переписывается как

$$\begin{aligned} \lfloor F_n(x+\varepsilon)) \rfloor &= F_n \lfloor x+\varepsilon \rfloor \\ F_n x + \lfloor F_n \varepsilon \rfloor &= F_n x \\ \lfloor F_n \varepsilon \rfloor &= 0. \end{aligned}$$

Так как последовательность Фибоначчи не ограничена, то найдется такой n, что $F_n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда $\lfloor F_n \varepsilon \rfloor \geq 1$ – противоречие.

№2. На доске выписаны числа от 1 до 100. Можно ли их разбить на пары так, чтобы в каждой паре сумма чисел делила сумму их квадратов?

Proposed by Potseluiko Andrei, Russia

Посмотрим на пару, в которой единица. Должно выполняться, что $1 + a \mid 1 + a^2$. Понятно, что $1 + a \mid (1+a)^2$, значит, $1 + a \mid (1+a)^2 - 1 - a^2 = 2a$.

Понятно, что $1 + a \mid 2(1+a)$, значит $1 + a \mid 2(1+a) - 2a = 2$.

Но тогда $a = 1$, или 0. Но на доске только натуральные числа, а 1 занята, противоречие, значит нельзя.

№3. Существует ли неравнобедренный треугольник с целыми координатами такой, что центры его вписанной, описанной, вневписанных окружностей, а так же ортоцентр имеют целые координаты?

Proposed by Konshin Alexey, Russia

Ответ: Да, существует.

Рассмотрим треугольник ABC с вершинами C, A, B в точках с координатами $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,8)$ соответственно. Пусть длины сторон $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Так как центр описанной окружности это середина гипотенузы, то это будет точка с координатами $(3,4)$.

Ортоцентр это вершина C.

Так как длина радиуса вписанной окружности это $\frac{a+b-c}{2}$ и $\angle C = 90^\circ$, то $DIEC$ это квадрат, где точки D и E это точки касания вписанной окружности с сторонами треугольника ABC. Значит, центр вписанной окружности имеет координаты $(2,2)$.

Аналогично, так как длина радиуса вневписанной окружности это $\frac{a+b+c}{2}$ и $\angle C = 90^\circ$, то центр вневписанной окружности имеет координаты $(12,12)$.

Радиус описанной окружности целое число, и центр описанной тоже имеет целочисленные координаты, так что центры дуг тоже.

Центры вневписанных окружностей это точки симметричные центру вписанной относительно середины "мелких" дуг AC и BC. все эти точки имеют целочисленные координаты, так что и центры вневписанной тоже целочисленные.

№4. Дан граф на n вершинах, в котором между любыми двумя различными вершинами существует путь длиной 2.

Каково минимальное количество рёбер в этом графе (в качестве функции от n)?

Proposed by Murat Timur, Kazakhstan

Пусть T – количество "уголков", то есть троек из трех вершин (a,b,c), что a связан с b и b связан с c.

По условию между любыми двумя вершинами есть хотя-бы один такой уголок (путь длины 2), так что $T \geq \binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$.

С другой же стороны чтобы получить уголок, мы должны сначала выбрать середину данного уголка (b) и две различных вершины смежных с ней (a и c). То есть

$$T = \sum \binom{d_i}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum d_i^2 - \sum d_i\right).$$

Где суммирования проходят по всем ребрам. То есть

$$n^2 - n \leq \sum d_i^2 - \sum d_i = \sum d_i^2 - 2x$$

Где x – количество ребер в данном графе. То есть нам нужно при фиксированном $\sum d_i$ максимизировать $\sum d_i^2$.

Утверждение 1: Степень каждой вершины хотя-бы 2. Рассмотрим вершину a у которой не более одного соседа – b. Тогда между a и b не существует пути длиной 2 – противоречие.

Утверждение 2: Максимум $\sum d_i^2$ достигается при $d = \{2, 2, \ldots, 2, 2x - 2(n-1)\}$. Если есть d_i и d_j, что $d_i \geq d_j > 2$, то

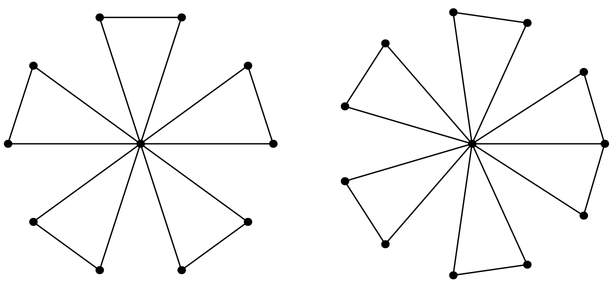
$$(d_i + 1)^2 + (d_j - 1)^2 = d_i^2 + 2d_i + 1 + d_j^2 - 2d_j + 1 \geq d_i^2 + d_j^2.$$

Тогда у нас есть неравенство

$$\underbrace{2^2 + 2^2 + \cdots + 2^2}_{n-1} + (2x - 2(n-1))^2 - 2x \geq n^2 - n.$$

Решив его мы получаем, что $x \geq \frac{3(n-1)}{2}$. То есть $\left\lceil \frac{3(n-1)}{2} \right\rceil$.

Осталось только привести пример:



$n = 2k + 1$ $\qquad$ $n = 2k$

Ремарка: Мы не применили в этой задаче этот факт, но степень каждой вершины должна быть не более чем $n - 1$, что может как-то ограничить $\sum d^2$.

№1. Дан собранный кубик Рубика 3×3×3. Петя сначала определяет последовательность из нескольких ходов, а Вася раз за разом повторяет эту последовательность ходов.

Докажите, что в какой-то момент Вася обратно получит собранный кубик Рубика.

Proposed by Murat Timur, Kazakhstan

Очень грубо оценим общее число возможных позиций кубика Рубика – каждый кубик может находиться в не более чем 27 позициях в не более чем 24 ориентациях. Так что общее количество позиций не более $(27 \cdot 24)^{27}$ – конечное число.

Будем рассматривать позиции только после завершения цикла ходов Васей. По принципу Дирихле (позиций конечно, а ходов бесконечно) в какой-то момент после очередного повторения ходов Васей, он получил позицию которая уже достигалась до этого. Пусть это произошло после i-того и j-того повторения ходов соответственно. Так как все ходы в кубике Рубика обратимы, то повторив все ходы в обратном порядке мы получим, что после $i-1$-ого и $j-1$-ого хода позиции были одинаковыми. Продолжая такую логику после $j-i$-того хода позиция была такой же как и после 0-го хода. То есть кубик был собран.

Ремарка: общее количество возможных позиций – $\dfrac{12! \cdot 8! \cdot 2^{11} \cdot 3^7}{2}$.

№2. Дано натуральное число n и натуральные числа x_1, x_2, $\dots$, x_k (k не фиксировано) такие, что $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$.

Найдите наибольшее возможное значение $x_1 x_2 \dots x_k$.

Proposed by Murat Timur, Kazakhstan

Очевидно, что максимум существует, выберем набор чисел что дает нам этот максимум, если таких несколько, то выберем ту в которой наибольшее количество чисел.

Если $x_i = 1$, то заменив x_i и x_1 на $x_1 + 1$ общее произведение увеличится – противоречие.

Если $x_i \geq 4$, то заменив x_i на $(2, x_i - 2)$ общее произведение не уменьшится (так как $2(x-2) \geq x$ для $x \geq 5$), а общее количество чисел увеличится – противоречие.

То есть $x_i \in \{2, 3\}$. Если количество $x_i = 2$ хотя-бы 3, то заменив $(2,2,2)$ на $(3,3)$ произведение увеличится $(9 > 8)$ – противоречие.

Теперь приведем пример:

$n \pmod 3$	Ответ
0	$3^{\frac{n}{3}}$
1	$4 \cdot 3^{\frac{n-4}{3}}$
2	$2 \cdot 3^{\frac{n-2}{3}}$

№3. Касательные в точках A и B к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке F. A_1 и B_1 – середины сторон BC и AC соответственно. Описанные окружности треугольников FAB_1 и FBA_1 пересекаются в точке L. Отрезок FL пересекает сторону AB в точке K. Докажите, что L, A_1, B_1 и K лежат на одной окружности.

Proposed by Leonid Finarevskiy, Aleph[2]

Пусть H — основание высоты CH треугольника ABC. Пусть FH пересекает окружность описанную около треугольника FAB_1 в точке L'. Пусть $\angle CAB = \beta$ и $\angle ACB$ Значит $\angle B_1L'F = 180° - \alpha - \beta$. И так как $HA_1 = A_1B$, то $\angle A_1HB = 180° - \alpha - \beta = \angle B_1A_1H$. И так как $\angle B_1A_1H = \angle B_1L'H$, то четырехугольник $B_1L'A_1H$ вписанный, значит $\angle A_1L'H = \angle HB_1A_1 = \angle B_1HA = \beta$. Но так как $\angle A_1BF = \angle A_1BA + \angle FBA = \alpha + 180° - \alpha - \beta = 180° - \beta$. Значит $L'A_1, BF$ вписанный, значит $L' = L$ и L лежит на окружности $L'A_1BF$

№4. Числа x и n – натуральные, и число

$$\sqrt{\frac{x^2(n+1)-2}{n}}$$

является целым. Докажите, что $n = 1$.

[2]НМИ «Алеф» — сообщество составителей уникальных авторских задач по математике https://aleph-problems.com

Proposed by Kengshilik Yerkanat, Kazakhstan

Пусть наше уравнение имеет решение при $n > 1$ и пусть $\sqrt{\frac{x^2(n+1)-2}{n}} = y$ и давайте возьмем минимальное x при фиксированном n.

Очевидно, что если $n > 1$, то $y > x$. Пусть $y = x + k$, где k это натуральное число. Если раскрыть наше уравнение, то получим квадратное уравнение $x^2 - 2xkn - 2 - k^2 n = 0$. Тогда у нас по теореме Виета, второй корень будет равен $2kn - x$, что отрицательное число, так как свободный член уравнения у нас отрицательное число.

Давайте докажем, что число $x - 2kn$ подходит вместо нашего x, тем самым опровергнув тот факт, что наш x минимальный. Можно заметить, что $\sqrt{\frac{(x-2kn)^2(n+1)-2}{n}} = |k + 2nk - x|$ (можете сами проверить). Это приводит к противоречию. Значит $n = 1$.

Капитанский бой. Найти количество пар различных решений $0 \leq x,\ y < 29$ удовлетворяющих $(x-5y)(x-6)(y-7)$ делится на 29.

Ответ: 82

№1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Пусть точки D_b и D_c точки симметричные точке D относительно сторон AB и AC соответственно. Пусть прямые CD_c и BD_b пересекаются в точке R. И точка M – середина отрезка D_bD_c.

Докажите, что точки A, M, R коллинеарны.

Proposed by Kurmankulov Sultan, Kazakhstan

Так как $\angle AD_bR = \angle AD_cR = 90^\circ$, то AD_bD_cR вписанный.

Так как $AD_b = AD_c$, значит $\angle AD_bD_c = \angle AD_cD_b$, то $\angle D_bRA = \angle D_cRA$.

Пусть AR пересекает D_bD_c в точке M'. Так как $AD_b = AD_c$ и сторона AR общая, то прямоугольные треугольники AD_bR и AD_cR равны, значит $RD_b = RD_c$. И так как $\angle D_bRA = \angle D_cRA$, значит $D_bM' = D_cM'$, значит M' это середина D_bD_c значит $M' = M$.

№2. Найдите такое натуральное число n, для которого количество пар натуральных чисел (x, y), удовлетворяющих неравенствам

$$x^2 \leq y < n^2,$$

равно 444.

Proposed by Bazarbay Miras, Kazakhstan

Если сначала выберем y и для него посчитаем количество подходящих x. Тогда количество таких пар равно сумме

$$\sum_{y=1}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{y} \rfloor = 444.$$

$$3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + \cdots + (2n-1) \cdot (n-1) = 444$$

Это сумму можно записать как

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1) = 444.$$

$$2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = 444.$$

Решив данное уравнение у нас выходит единственный ответ $n = 9$.

№3. Для данного связного взвешенного графа с различными весами на всех ребрах докажите, что существует единственный подграф-дерево (минимальное остовное дерево) с наименьшей возможной суммой весов.

Proposed by Murat Timur, Kazakhstan

Пойдём от противного, допустим существуют 2 различных дерева с минимальной суммой – T и T'. Так как они различные существует хотя-бы одно ребро e, что входит в T, но не входит в T'. Если мы добавим это ребро в T' у нас появиться цикл. Если все ребра в этом цикле находятся в T, то у T есть цикл, что противоречит определению T. Так что существует ребро e' в данном цикле что не входит в T.

У нас есть 2 случая:

Если $e > e'$, то граф T без ребра e, но с добавлением e' будет деревом, с меньшим весом – противоречие и наоборот.

Значит $e = e'$, что противоречит условию.

№4. Дано нечетное натуральное число n. Рассмотрим все такие натуральные числа a, не превосходящие n, что $a^2 - 1$ делится на n. Докажите, что их количество – степень двойки.

Proposed by Sapov Pavel, Aleph[3]

Пусть n делится на простое число p, p нечетно. Тогда, так как $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ делится на степень p, то какой-то из множителей делится на нее, так как $a-1$ и $a+1$ не могут оба делиться на p.

Мы получили такую систему сравнений: a сравнимо с 1 или -1 по модулю любого нечетного примарного сомножителя n. Также мы доказали, что выполнение вышеперечисленных условий достаточно для выполнения делимости из условия.

Если k – число простых делителей n, то полученная система равносильна совокупности из 2^k(число способов выбрать последовательность из k чисел $+1$ или -1) систем линейных сравнений по попарно взаимно простым модулям. По китайской теореме об остатках каждая такая система имеет ровно одно решение по модулю их произведения(т.е. по модулю n), а тогда дает ровно одно подходящее значение a. Тогда количество подходящих чисел a равно 2^k, что и требовалось.

[3]НМИ «Алеф» — сообщество составителей уникальных авторских задач по математике https://aleph-problems.com

№5. В треугольнике ABC угол при вершине A равен $60°$ и $AB < AC$. Пусть I – центр его вписанной окружности. Прямая перпендикулярная CI проведённая из точки I пересекает прямые AB и BC в точках Y и P соответственно. Также прямая перпендикулярная BI проведённая из точки I пересекает прямые AC и BC в точках Z и Q соответственно. Описанная окружность треугольника AYZ вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке R.

Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и PQR касаются.

Proposed by Kengshilik Yerkanat, Kazakhstan

Обозначим описанную окружность треугольника AYZ через ω. Пусть J – это отражение точки I относительно прямой BC.

Утверждение 1. $I \in \omega$.

Доказательство. У нас $\angle YAZ = 120° = \angle YIZ$, следовательно, I лежит на ω.

Утверждение 2. $J \in (ABC)$.

Доказательство. Из симметрии имеем $\angle BJC = \angle BIC = 120° = 180° - \angle BAC$, следовательно, J лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Утверждение 3. $J \in \omega$.

Доказательство. У нас $PICJ$ – вписанный четырёхугольник, так как $\angle PIC = \angle PJC = 90°$. Следовательно, $\angle YIJ = \angle PIJ = \angle PCJ = \angle BAJ = \angle YAJ$. Это означает, что $R = J$.

Из симметрии имеем $\angle BRQ = \angle CRP = 30°$. Следовательно, окружности (PQR) и (ABC) касаются.

№6. Положительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c + ab + bc + ac \leq 3abc$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2+b} + \frac{1}{b^2+c} + \frac{1}{c^2+a} \leq \frac{3}{4}.$$

Proposed by Bazarbay Miras, Kazakhstan

Заметим, что по неравенству Коши-Буняковского $(a^2 + b)(1 + b) \geq (a + b)^2$, а также $(a + b)^2 \geq 4ab$. Тогда

$$\frac{1}{a^2+b} + \frac{1}{b^2+c} + \frac{1}{c^2+a} \leq \frac{1+b}{(a+b)^2} + \frac{1+c}{(b+c)^2} + \frac{1+a}{(c+a)^2} \leq \frac{1+b}{4ab} + \frac{1+c}{4bc} + \frac{1+a}{4ca} =$$

$$= \frac{a+b+c+ab+bc+ca}{4abc} \leq \frac{3}{4}.$$

№1. Найдите все пары натуральных чисел m, n таких, что $m > 1$ и $\dfrac{(n!+1)}{(m^2-1)}$ – точный квадрат.

Proposed by Zaripov Alan, Russia

Ответ: $n = m = 2$

Пусть $n! + 1 = k^2(m^2 - 1)$.

Если $n = 1$, то $2 = k^2(m^2 - 1)$, не имеет решений ибо, правая часть или равна 0, или хотя бы 3.

Если $n = 2$, то $3 = k^2(m^2 - 1)$. Отсюда цепочкой простых неравенств находим, что $k = 1, m = 2$.

Если $n \geq 3$, то $n! + 1$ сравнимо с 1 по модулю 3.

Если m не делится на 3, то $m^2 - 1$ делится на 3, то есть правая часть кратна 3, а левая – нет. Равенство невозможно.

Если же m делится на 3, то m^2-1 сравнимо с 2 по модулю 3. Значит $k^2(m^2-1) = 2k^2 \pmod 3$, а $2k^2$ по модулю 3 равно либо 0 либо 2. Получается, что при $n \leq 3$ левая и правая части равенства $n! = k^2(m^2 - 1)$ дают разные остатки при делении на 3, поэтому равенство на самом деле невозможно.

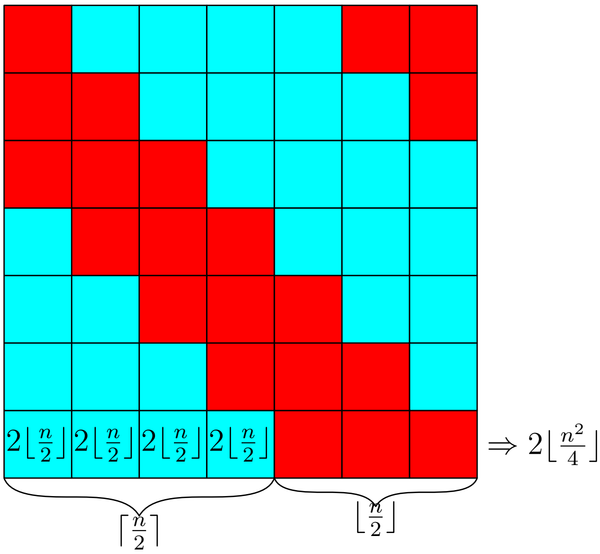
№2. Доску $n \times n$, покрасили в 2 цвета – красный и синий. Во все клетки синего цвета записали общее количество красных клеток в одной строке и в одном столбце с данной клеткой. Найдите максимально возможную сумму чисел в синих клетках.

Proposed by Murat Timur, Kazakhstan

Изменим условие – в каждую синюю клетку будем писать 2 числа – количество красных клеток в столбце и в строке соответственно. Будем считать общую сумму раздельно по строкам и столбцам.

Пусть x_i – количество красных клеток в i-той строке. Кажая красная клетка считается ровно $n - x_i$ раз, так что общая сумма в данной строке – $x_i(n - x_i) \leq \left\lfloor \dfrac{n^2}{4} \right\rfloor$. Складывая все строки получаем $n \left\lfloor \dfrac{n^2}{4} \right\rfloor$. Аналогично поступаем со столбцами, то есть общая сумму не больше чем $2n \left\lfloor \dfrac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Осталось только привести пример:



№3. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Прямые AD и BC пересекаются в точке Q, а диагонали AC и BD – в точке P. Точки M и N – середины отрезков AD и BC соответственно. MN пересекает AC и BD в точках S и R соответственно.

Докажите, что описанные окружности MQN и RPS касаются.

Proposed by Bolat Yerkebulan, Kazakhstan

Пусть X это точка пересечения (DPA) и (CPB). Пусть $\angle DAC = \beta$, $\angle BQP = \alpha$ и $\angle AQP = \gamma$. Также, пусть O это центр окружности $(ABCD)$. Так как $ADPX$ вписанный, то $\angle DXP = \beta$, также по определению точка X это точка Микеля для четырехугольника $QDPC$, то $QCXA$ вписанный, то $\angle QXC = \angle QAC = \beta$, значит $\angle CXP = \angle CXQ = \beta$ значит точки X, P, Q коллинеарны.

Утверждение 1: $MQNOX$ вписанный.

Доказательство: Очевидно, что $XM \perp AD$ и $XN \perp BC$, значит $QMXN$ вписанный.

Так как O центр, значит $\angle DOC = 2\beta = \angle DXC = 2\beta$ значит $DXOC$ вписанный, значит $90^\circ - \beta = \angle ODC = \angle OXC$. И так как $\angle CXP = \beta$, то $\angle OXQ = 90^\circ$, значит $MQNOX$ вписанный.

Утверждение 2: $PSRX$ вписанный.

Доказательство: Так как $\angle XMN = \gamma = \angle XAS$, значит $AMSX$ вписанный, значит $\angle MXS = \beta \Rightarrow \angle RSX = \beta + \gamma = \angle RPX$, значит $PSRX$ вписанный.

Пусть XU это касательная к $(MQNOX)$ в точке X. Значит $\angle UXN = \gamma \Rightarrow \angle UXR = \beta + \gamma = \angle RPX$. Значит XU касательная и к $(PSRX)$.

№4. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Найдите наибольшую действительную константу C, для которой выполнено неравенство:

$$\frac{1}{a\sqrt{c^2+1}} + \frac{1}{b\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{c\sqrt{b^2+1}} > C.$$

Proposed by Ashken Ilias, Kazakhstan

Ответ: $C = 2$

Совершим замену: $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$

$$\underbrace{\sum \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2} + \frac{z^2}{y^2}}} \geq \sum \frac{2}{1 + \frac{y^2+z^2}{x^2}}}_{AM \geq GM} = 2$$

Случай равенства при:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + z^2 \\ y^2 = x^2 + z^2 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow\Leftarrow$$

Следовательно знак строгий.

И каждое значение больше двух достигается, потому что при замене $a = \frac{1}{t}$, $b = 1$, $c = t$:

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}} + \frac{1}{t\sqrt{2}} \right) = 2$$

№5. Дано простое $p > 3$ и $\frac{p+3}{2}$ целых чисел. Докажите, что среди них, найдутся различные m, n, такие что $m^2 + mn - 2n^2$ делится на p.

Proposed by Amir Sakhipov, Hong Kong

Раскрасим данные числа в перламутровый цвет и будем рассматривать их по модулю p. Разложив на множители $m^2 + mn - 2n^2 = (m + 2n)(m - n)$, понятно что достаточно найти пару (m, n), такую что либо $m \equiv n \pmod p$, либо $m \equiv 2n \pmod p$ среди перламутровых чисел. Предположим, что таких пар нет.

Тогда у нас имеется $\frac{p+1}{2}$ различных ненулевых перламутровых остатков. Рассмотрим *особые* пары $(x, -2x)$ для каждого ненулевого вычета x. Ясно, что числа в таких парах различны, ведь иначе получаем

$$x \equiv -2x \pmod p \iff p \mid 3x \iff p \mid x$$

но x ненулевой остаток. Для каждой пары пусть количество перламутровых чисел в ней называется её *рангом.*

Определим S как сумму рангов всех $p-1$ особых пар. С одной стороны каждая пара содержит не более одного перламутрового остатка, то есть $S \leq p - 1$. С другой стороны каждое перламутровое число присутствует в двух парах, то есть его вклад в S равен 2. Следовательно $S \geq 2 \cdot \frac{p+1}{2} = p + 1$ – противоречие.

№6. Акежан и Батырхан хотят совершить круговое путешествие по Гонконгу, что значит что они хотят посетить каждый населенный пункт ровно один раз (это также значит, что они не возвращаются в изначальную точку, а также необязательно начинают из одной точки).

Акежан получил престижную стажировку, поэтому всегда выбирает самую дорогую поездку туда где еще не был (если таких несколько, то он выбирает любую).

Батырхану задерживают стипендию, поэтому он выбирает самый дешевый путь (если таких несколько, то выбирается любой).

Возможно ли, что Акежан потратит меньше Батырхана за все путешествие?

Proposed by Yurkevich Miron, United Kingdom

Мы построим биекцию перелётов, выполненных с помощью стратегии Акежана, на перелёты, выполненные с помощью стратегии Батырхана, так, чтобы перелёт Акежана был как минимум столь же дорогим, как и перелёт Батырхана.

Чтобы построить биекцию, рассмотрим двудольный граф G, где узлы одной части – дорогие перелёты, а узлы другой части – дешевые перелёты. Теперь нам нужно проверить условие теоремы Холла.

Рассмотрим дорогие перелёты A_1, A_2, $\ldots$, A_n сделанные в таком порядке. Предположим, что их начальные точки – a_1, a_2, a_n, которые должны быть разными, и еще дополнительная точка a_{n+1} – является пунктом назначения в полёте A_n.

Предположим, что Батырхан посещает a_1, a_2, $\ldots$, a_{n+1}, как a_{i_1}, a_{i_2}, $\ldots$, $a_{i_{n+1}}$, где $\{i_1, \ldots, i_{n+1}\} = \{1, \ldots, n+1\}$.

В качестве отправной точки рассмотрим $a_{i_k} = a_s$ и $a_{i_{k+1}} = a_t$ для $1 \leq s \leq n$. Обозначим полет Батырхана начинающийся в точке a_s равен B_s.

Заметим, что $B_s \leq a_{i_k} a_{i_{k+1}}$ (так как мы еще не посетили $a_{i_{k+1}}$). $a_{i_k} a_{i_{k+1}} = a_s a_t \leq \max(A_s, A_t)$.

Действительно, если $s > t$, то не более A_t, так как полет еще не посетил a_s. Если $t > s$, то не более A_s, так как полет еще не посетил a_t.

Единственные проблемы, которые могут возникнуть – если A_s или A_t не существует, то есть когда s или $t = n+1$.

Но тогда $B_s \leq a_{i_k} a_{i_{k+1}} = a_s a_t \leq A_s$, если $t = n+1$, так как t не был посещён, и $a_s a_t \leq A_t$, если $s = n+1$.

Таким образом, цена любого полета в $B_1, \ldots, B_m$ не превышает значения некоторого рейса в $A_1, \ldots, A_n$, так что образ всех соседей $A_1, \ldots, A_n$ состоит из $\geq n$ рейсов, поэтому условие Теореммы Холла выполняется.

Капитанский бой. Назовите угол (в градусах) между часовой и минутной стрелков в 20:16

Ответ: 152°

№1. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2+b^2+2c} + \frac{1}{b^2+c^2+2a} + \frac{1}{c^2+a^2+2b} \le \frac{3}{4}.$$

Proposed by Bolat Yerkebulan, Kazakhstan

По $AM - GM$ мы знаем, что $\frac{a^2+b^2+c+c}{4} \ge \sqrt[4]{a^2b^2c^2} = 1$. Тогда

$$\frac{1}{a^2+b^2+2c} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{a^2+b^2+c+c}{4}} \le \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+b^2+2c} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

№2. В остроугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен 60°. Пусть H – точка пересечения высот $\triangle ABC$, а точка D такова, что $ABDC$ – параллелограмм . Обозначим за M середину дуги BC описанной окружности $\triangle ABC$, не содержащей точку A.

Докажите, что точки H, M и D лежат на одной прямой.

Proposed by Bolat Yerkebulan, Kazakhstan

Пусть высоты BE и CF пересекаются в точке H. Так как $\angle BAC = 60^\circ$, то $\angle BHC = 120^\circ$. И так как $ABDC$ параллелограмм, то $\angle BDC = 60^\circ$, значит $BHCD$ вписанный. И так как $AC \parallel BD$, значит $\angle HBD = 90^\circ$, значит центр $(HBDC)$ лежит на HD.

Так как $BM = MC$ и $\angle BMC = 2\angle BDC$ значит M центр описанной окружности $(HBDC)$, значит H, M, D коллинеарны.

№3. Назар очень любит две вещи – складывать много чисел и само число 2025. Ему дана бесконечная последовательность натуральных чисел. Докажите, что он может выбрать более чем 2025 последовательных членов этой последовательности, что их сумма будет кратна 2025.

Proposed by Murat Timur, Kazakhstan

Выделим числа в группы по 2026 последовательных элемента последовательности, и назовем их A_1, A_2, $\ldots$, A_{2026}. Теперь определим так называемые префиксы, то есть $B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

По принципу Дирихле у каких-то двух групп суммы чисел будут одинаковые остатки при делении на 2025, пусть эти группы – B_i и B_j, причем $i < j$.

Тогда рассмотрим числа в множестве $B_j \setminus B_i$, сумма элементов в ней кратна 2025, и в ней находятся $2026(j-i) > 2025$ элементов.

№4. Дано натуральное n и положительное r.

На координатной плоскости в точке $(0,0)$ стоит фишка. Игроки A и B играют в игру:

За ход A выбирает число $0 \le d \le 1$, после чего B выбирает одно из направлений (вверх, вниз, влево, вправо) и двигает фишку на расстояние d в выбранном направлении.

Среди каждых n последовательных ходов B должен выбрать каждое направление хотя бы один раз. Игрок A побеждает, если фишка окажется на расстоянии хотя бы r от начальной точки.

Может ли A гарантировать себе победу, независимо от выборов B?

Proposed by Ashken Ilias, Kazakhstan

Ответ: Может.

Выберем какое-то направление, допустим вверх. Определим $x = \frac{1}{2^n}$.

Докажем, что A за конечное число ходов может подвинуть фишку вверх на x.

Пусть A сначала выберет расстояние x, и после этого действует по следующей стратегии:

- Если B выберет влево или вправо, то A повторяет предыдущее выбранное число.
- Если B выберет вниз, то A удваивает свое выбранное число.
- Если B выберет вверх, то мы преуспели, так как ходы (по вертикали) будут $-x - 2x - 4x - \cdots - 2^k x + 2^{k+1}x = x$. И начинаем цикл заново.

B должен выбрать вверх хотя-бы один раз за n ходов, так что число выбранное A на k-том ходу будет $2^{k-1}x < 1$.

Повторив данную операцию $\left\lceil \frac{r}{x} \right\rceil$ раз мы будем на расстоянии хотя-бы r от начальной точки.

№5. Для многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ верно что

$$n \nmid P_k(0) = P\underbrace{(P(\ldots(}_{k}0\underbrace{)\ldots))}_{k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Докажите что существуют целые $0 \le a < b \le n-1$, что

$$n \mid P(b) - P(a).$$

Proposed by Ashken Ilias, Kazakhstan

Обозначим $P_k(0) = a_k$. Так как количество остатков по $\pmod n$ конечно, то

$$\exists\ i \not\equiv j \pmod n \ \rightarrow\ a_i \equiv a_j \pmod n$$

Выберем минимальные такие a_i, a_j. Тогда

$$a_{i-1} \equiv a \pmod n \qquad a_{j-1} \equiv b \pmod n$$

$$a_i - P(a) \equiv 0 \pmod n \qquad a_j - P(b) \equiv 0 \pmod n$$

$$(a_i - a_j) + (P(b) - P(a)) \equiv 0 \pmod n$$

$$P(b) - P(a) \equiv 0 \pmod n.$$

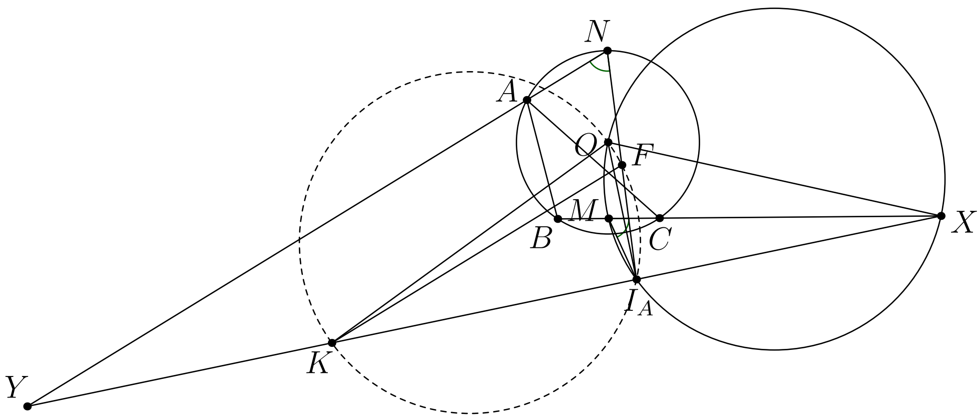
№6. В треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности, а точка I_A – центр вневписанной окружности, касающейся продолжений сторон AB и AC и стороны BC. Прямая, перпендикулярная OI_A в точке I_A, пересекает прямую BC в точке X, а внешнюю биссектрису угла BAC – в точке Y.

В каком отношении точка I_A делит отрезок XY?

Proposed by Bolat Yerkebulan, Kazakhstan

Пусть K — середина отрезка I_AY. Будем доказывать, что I_A — середина KX, или же то, что $\angle XOI_A = \angle KOI_A$, откуда будет следовать наш ответ — $1:2$.

Поскольку $\angle OI_AX = \angle OMX = 90°$, то OMI_AX вписанный. Следовательно, по нашей лемме, $\angle XOI_A = \angle XMI_A = \angle CMI_A = \angle I_ANA$. Пусть теперь F — середина отрезка I_AN. Заметим, что тогда $KF \parallel YN$, или $\angle I_AFK = \angle I_ANA$. В прямоугольном треугольнике I_ANA, F — середина гипотенузы, поэтому $FA = FN$. Это равносильно тому, что F лежит на серединном перпендикуляре к AN. Стало быть, $FO \perp AN$, а по доказанному ранее, $\angle FOK = 90°$. Значит, четырёхугольник $FOKI_A$ вписан в окружность с диаметром FK, или же $\angle I_AFK = \angle I_AOK$.



№1. Дан треугольник ABC и описанная около него окружность ω. Касательные к ω в точках B и C пересекаются в точке T. Пусть середины отрезков AC, AB и BC это E, F и D соответственно. Пусть EF пересекает ω в точках X и Y. Обозначим угол $\angle XTY$ за γ, угол $\angle XDY$ за α и угол $\angle XAY$ за β. Докажите, что

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 360^\circ.$$

Proposed by Shcherbatov Yaroslav, Russia

Пусть XD и YD пересекает (ABC) в точках P и Q соответственно.

Проведем отрезки XB и YC, тогда так как XT и YT симедианы, то $\angle BXT = \angle CXP = \angle CYT = \angle BYD = y$. Пусть $\angle XAB = x \Rightarrow \angle YAC = \angle YBC = \angle XCB = x$. Так как $\angle XBY = 180^\circ - \beta$ и $\angle YBC = x$ и $\angle CBT = \beta - 2x$ и $\angle BXT = y$, то $\angle BTX = x - y$, то $\gamma = 180^\circ - 2\beta + 2x + 2y$.

Также, так как BC это касательная к окружности (XDY) в точке D, то $\angle XDB = x + y$, то $180^\circ = \alpha + 2x + 2y$, то $\alpha + 2\beta + \gamma = 360^\circ$

№2. Строго убывающая функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такова, что для всех положительных x выполняется равенство:

$$f(1+x) + f(1+f(x)) = 1.$$

Докажите, что $f(1) = 1$.

Proposed by Murat Timur, Kazakhstan

Подставив $f(x)$ на место x получим

$$f(1+f(x)) + f(1+f(f(x)) = 1 = f(1+x) + f(1+f(x)) \Leftrightarrow \boxed{f(1+f(f(x))) = f(1+x)}$$

Т.к. f – убывающая, то она инъективна, поэтому равенство выше равносильно

$$1 + f(f(x)) = 1 + x \Leftrightarrow \boxed{f(f(x)) = x}$$

Инволюция даёт нам сюръективность, а вместе с монотонностью – непрерывность.

Заметим, что из оригинального равенства следует

$$\forall\, a > 1 : f(a) < f(1 + (a-1)) + f(1 + f(1-a)) = 1$$

$$f(1+x) + f(1+f(x)) = 1 \Leftrightarrow f(1+f(x)) = 1 - f(1+x)$$

$$\boxed{1 + f(x) = f(f(1+f(x)) = f(1 - f(1+x))}$$

т.к. f сюръективная и убывающая, то для любого b, меньшего 1 и достаточно близкого к нему существует x такой, что $1 - f(x+1) = b$, тогда

$$\forall\, a < 1 : f(a) > f(b) = f(1 - f(1+x)) = 1 + f(x) > 1$$

$$\begin{cases} f(x) > 1, & x < 1 \\ f(x) < 1, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 1$$

№3. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, p), удовлетворяющие следующим условиям: $3^a p + 1 = 10^b$, а также p – простое число, в десятичной записи которого есть две различные цифры.

Proposed by Sapov Pavel, Aleph[4]

Ответ: $(3, 3, 37)$ Пусть $a = 1$. Тогда несложно видеть, что десятичная запись p состоит из одних троек, что противоречит условию. Аналогично при $a = 2$ число p записывается одними единицами, противоречие.

Пусть теперь $a > 2$. Тогда $27 \mid 3^a$, тогда $27 \mid 10^b - 1$. Тогда, как несложно проверить, b делится на 3. Значит, $10^b - 1$ делится на $10^3 - 1 = 999$, а тогда делится и на 37, значит, $p = 37$.

Так как $(10-1)\,\vdots\,3$, то по LTE лемме, получаем: $a = 2 + \nu_3(b) \Rightarrow a \leq 2 + log_3(b)$. Значит:

$$10^b - 1 = 3^2 \cdot 3^{\nu_3(b)} \cdot 37 \leq 37 \cdot 9 \cdot 3^{log_3(b)} = 37 \cdot 9 \cdot b \Rightarrow$$

$$10^b - 1 \leq 333b \Rightarrow b \leq 3$$

Ибо слева экспоненциальная функция, а справа линейная. И так как $b\,\vdots\,3$, то $b = 3$, то $a = 3$.

Легко понять, что наш ответ подходит.

№4. Икар летит на восковых крыльях сделанных ему Дедалом. Каждую секунду он либо махает крыльями и поднимается на 1 метр вверх, либо не делает ничего и падает на 1 метр вниз. Чтобы его крылья не расплавились Дедал сказал ему не летать выше k метров над землей.

Икар хочет полетать $2n$ секунд, сколько существует возможных путей полета если

(a) $k = 2$;

(b) $k = 3$?

(Икар может в процессе полета находится на земле, но сразу же после этого должен подняться.)

Proposed by Murat Timur, Kazakhstan

(a)[4] Пусть ответ – a_n, докажем, что $a_n = 2^{n-1}$ индукцией, база очевидна. Также определим $a_0 = 1$, на будущее.

Переход: пусть Икар оказался на земле в первый раз после вылета на $2m$-той секунде, количество способов сделать это – 1 (вверх, вверх, вниз, вверх, вниз, $\ldots$, вверх, вниз, вверх, вниз, вниз). Тогда после этого Икар должен полетать $2(n-m)$ секунд, количество способов сделать это – a_{m-n}.

[4] НМИ «Алеф» — сообщество составителей уникальных авторских задач по математике https://aleph-problems.com

То есть всего способов

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_0 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 + 1 = 2^n.$$

(b)[8] Пусть ответ – b_n.

Пусть Икар оказался на земле в первый раз после вылета на $2m$-той секунде. Рассмотрим его полет от первой до $2m-1$-той секунды, в нем он не может лететь выше 2 метров над своей изначальной высотой и опускаться ниже своей высоты он тоже не может, то есть эту часть его пути можно считать как полет длиной $2m-2$ в предыдущем пункте, всего способов сделать это – $a_{m-1} = 2^{m-1}$. Тогда после этого Икар должен полетать $2(n-m)$ секунд, количество способов сделать это – b_{m-n}.

То есть всего способов

$$b_n = a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + a_2 b_{n-3} + \cdots + a_{n-2} b_1 + a_{n-1} b_0 =$$

$$= b_{n-1} + b_{n-2} + 2b_{n-3} + \cdots + 2^{n-2} b_1 + 2^n b_0 = 3b_{n-1} - b_{n-2}.$$

То есть последовательность b_i рекуррентная. А для таких последовательностей есть общая формула:

$$b_n = C_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_1 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Для каких-то констант C_1 и C_2. Решив систему для $n = 0$ и $n = 1$ получим

$$b_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

№5. Даны действительные числа $x \geq y \geq z \geq t > 0$, для которых выполняется равенство:

$$xyz = t\sqrt{xyzt} + (x-t)(y-t)(z-t).$$

Докажите, что $x = y = z = t$.

Proposed by Kengshilik Yerkanat, Kazakhstan

Так как у нас уравнение однородное, разделив все на t^3 нам достаточно доказать для случая $t = 1$.

Докажем, что если $x, y, z \geq 1$, то $xyz \geq \sqrt{xyz} + (x-1)(y-1)(z-1)$ и равенство только при $x = y = z = 1$.

Зафиксируем x и y и пусть $f(z) = xyz - \sqrt{xyz} - (x-1)(y-1)(z-1)$. Докажем, что $f(z) > f(1)$ если $z > 1$.

Если сократить равные члены и разделить на $\sqrt{z} - 1$, то нужно доказать, что $(\sqrt{z} + 1)(x + y - 1) \geq \sqrt{xy}$.

А это верно, так как $(\sqrt{z}+1)(x+y-1) > x+y-1 \geq 2\sqrt{xy} - 1 \geq \sqrt{xy}$. Значит теперь достаточно доказать, что $f(1) \geq 0$, что верно, так как $f(1) = \sqrt{xy}(\sqrt{xy} - 1) \geq 1(1-1) = 0$.

Так как у нас в изначальной уравнении $f(z) = 0$, то $x = y = z = 1$, а из однородности $x = y = z = t$.

№6. Дан остроугольный треугольник ABC. Касательная в точке A пересекает прямую BC в точке S. Пусть H_b и H_c это основания высот из вершин B и C соответственно. Прямые проходящие через A параллельно CH_c и BH_b пересекают BH_b и CH_c в точках P и Q соответственно.

Докажите, что P, Q, S лежат на одной прямой.

Proposed by Kuznetsov Stanislav, Russia

Пусть центр описанной окружности (ABC) и пусть BB_1 и CC_1 это диаметры (ABC).

Пусть $\angle BCO = \alpha \Rightarrow \angle CBO = \alpha \Rightarrow \angle CAB_1 = \alpha$. Но так как прямые AB_1 и CH параллельны, то $\angle QAC = \angle HCO = \angle BCO = \alpha$, то A, Q, B_1 коллинеарны. Аналогично получаем, что A, P, C_1 коллинеарны.

Пусть пересечение CQ и PB это точка T. Так как P и Q изогонально сопряжены относительно угла ABC, то по теореме об изогоналях, T лежит на прямой которая изогонально сопряжена прямой AH, ибо CP и BQ пересекаются в точке H. И так как AH и изогонально сопряжены, точки T, A, O коллинеарны.

Пусть X это пересечение CO и AB_1, и Y это пересечение BO AC_1. Значит по теореме Паскаля для шестиугольника B_1AAC_1CB, точки X, Y и точка S лежат на одной прямой. Тогда по теореме дезарга для треугольников QAP и COB получим, что PQ и пересекаются в точке S, что требовалось доказать.

Академический комитет

Спонсоры и партнёры:

Орг. комитет:

- Кожабек Арсен, Ким Атай, Аманжолов Амирлан, Аубакиров Айтуар, Кендірбаев Жалғас, Базарбай Мирас, Которова Вера, Кабдолла Ансар, Ахмулаев Ильшатрозы, Даулет Диас, Анарбек Арсен, Альпенов Руслан, Жиенбаев Әділ

Комитет по отбору задач:

- **Мурат Тимур** – председатель академического комитета AMB, двухкратный серебряный медалист Республиканской Олимпиады, бронзовый медалист BMO, двухкратный серебряный медалист IZhO
- **Курманкулов Султан** – серебряный медалист Республиканской Олимпиады, бронзовый медалист SRMC, бронзовый медалист APMO
- **Кеншилик Ерканат** – бронзовый медалист IMO, золотой медалист Республиканской Олимпиады, серебряный медалист IZhO
- **Мырзатай Айбек** – золотой медалист IMO, золотой медалист Республиканской Олимпиады, золотой медалист IZhO, золотой медалист JBMO
- **Юркевич Мирон** – Четырехкратный серебряный медалист IMO, золотой медалист Республиканской Олимпиады, серебряный медалист BMO, золотой медалист IZhO

Авторы задач:

- **Мурат Тимур** – председатель академического комитета AMB, двухкратный серебряный медалист Республиканской Олимпиады, бронзовый медалист BMO, двухкратный серебряный медалист IZhO
- **Ашкен Илияс** – бронзовый медалист IZhO бронзовый медалист Республиканской Олимпиады по математике двухкратный золотой медалист AMB

- **Болат Еркебулан** – бронзовый призер Областной Олимпиады
- **Юркевич Мирон** – Четырехкратный серебряный медалист IMO, золотой медалист Республиканской Олимпиады, серебряный медалист BMO, золотой медалист IZhO
- **Базарбай Мирас** – бронзовый медалист Республиканской Олимпиады, жюри на Олимпиаде имени Эйлера
- **Кеншилик Ерканат** – бронзовый медалист IMO, золотой медалист Республиканской Олимпиады, серебряный медалист IZhO
- **Коншин Алексей** – призер ВсОШ, кандидат в сборную России по математике, участник международной летней конференции турнира городов
- **Кузнецов Станислав** – автор проекта ЛКТГ 2025, автор задач на Шарыгинскую Олимпиаду, жюри на Шарыгинской Олимпиаде и Турнире Колмогорова, организатор устной Олимпады лицея ВШЭ
- **Поцелуйко Андрей**– призер ВсОШ, победитель Олимпаиды МФТИ
- **Сахипов Амир** – серебряный медалист IMO, золотой медалист Республиканской Олимпиады, серебряный медалист BMO, золотой медалист IZhO
- **Штурман Арсений** – победитель ВсОШ по математике 2024, кандидат в сборную России по математике 2025, призёр ВсОШ по математике 2025, серебряный призёр RMM 2025
- **Щербатов Ярослав** – студент МФТИ, автор задач на Шарыгинскую Олимпиаду, жюри Шарыгинской Олимпиады
- **Зарипов Алан** – призер ВсОШ, победитель олимпиады Туймаада, второе место на заключительном этапе Шарыгинской Олимпиады
- **Курманкулов Султан** – серебряный медалист Республиканской Олимпиады, бронзовый медалист SRMC, бронзовый медалист APMO
- **Лим Эрик** – золотой медалист Республиканской Олимпиады, золотой медалист TasIMO, серебряный медалист IZhO, серебряный медалист JBMO
- **Матниязов Жиенкожа** – золотой медалист Республиканской Олимпиады, бронзовый медалист IZhO, бронзовый медалист SRMC
- **Михайло Сидоренко** – член сборной Великобритании, член сборной Украины на IMO 2024, член сборной Украины на RMM 2024, член сборной Украины на CAPS 2023, призер Всеукраинских олимпиад с математики
- **Пименов Марк** – студент МФТИ, серебряный медалист IZhO, призер ВсОШ, победитель Устного тура Турнира Городов
- **Французов Церен** – золотой медалист IMO, золотой медалист RMM, абсолютный победитель ВсОШ.

Жюри:

- **Курманкулов Султан** – серебряный медалист Республиканской Олимпиады, бронзовый медалист SRMC, бронзовый медалист APMO
- **Мамышев Бахыт** – основатель учебного центра CleverS, тренер в РФМШ Алматы и Астана, руководитель сборной Казахстана на EGMO, руководитель РФМШ Алматы и Астана на IZhO, жюри APMO, SRMC
- **Меньщиков Андрей** – тренер сборной Москвы, тренер в РФМШ, жюри IMO, APMO, SRMC, IZhO
- **Жук Владимир** – Тренер в школе Haileybury Almaty, руководитель сборной г. Алматы на IZhO, APMO, SRMC
- **Ашкен Илияс** – бронзовый медалист IZhO бронзовый медалист Республиканской Олимпиады по математике двухкратный золотой медалист AMB
- **Нугуманов Ильяс** – бронзовый медалист IZhO,бронзовый медалист SRMC, серебряный медалист Республиканской Олимпиады
- **Дидарбекова Анар** – серебряный призер IZhO, бронзовый медалист EGMO, бронзовый медалист Республиканской Олимпиады
- **Байдавлетов Санжар** – студент Казахстанско-Британского технического университета, преподаватель олимпийского резерва школы НИШ, член сборной Казахстана по математике, серебряный медалист IZhO, серебряный медалист Республиканской Олимпиады
- **Саятулы Абай** – член сборной Казахстана по математике, серебряный медалист Республиканской Олимпиады, серебряный медалист IZhO
- **Усенов Эльдар** – член сборной Казахстана по математике, золотой призёр Республиканской Олимпиады, серебряный медалист BMO, серебряный медалист APMO, бронзовый призёр SRMC, Золотой призёр IZhO
- **Халел Муслим** – серебрянный медалист Республиканской Олимпиады, бронзовый медалист IZhO, серебряный медалист APMO, бронзовый медалист SRMC
- **Джумадильдаев Сагын** – призер International Science and Engineering Fair, абсолютный победитель Республиканского Конкурса Научных Проектов, призер Республиканской Олимпиады, абсолютный победитель Республиканской Юниорской Олимпиады
- **Шарханов Жан** – студент Казахстанско-Британского Технического Университета, серебряный призер IZhO, серебряный призер Республиканской Олимпиады
- **Еркебұланұлы Али** – член сборной Казахстана по математике, золотой призёр Республиканской Олимпиады, золотой медалист JBMO, бронзовый медалист APMO, бронзовый призёр SRMC, золотой призёр IZHO
- **Алтынбек Ерасыл** – Бронзовый медалист IMO, золотой и серебрянный медалист Республиканской Олимпиады, серебряный медалист IZhO, серебряный медалист APMO, серебряный медалист SRMC

- **Лим Эрик** – золотой медалист Республиканской Олимпиады, золотой медалист TasIMO, серебряный медалист IZhO, серебряный медалист JBMO
- **Кайрат Аружан** – бронзовая медалистка EGMO, бронзовая медалистка IZhO, бронзовая медалистка Республиканской Олимпиады
- **Ержанов Санжар** – член сборной Казахстана по математике, золотой медалист Республиканской Олимпиады, серебряный медалист SRMC, серебряный медалист IZhO
- **Касенова Арай** – Бронзовая медалистка EGMO, серебрянная медалистка APMO, серебрянная медалистка SRMC, бронзовая медалистка Республиканской Олимпиады
- **Арыстанбек Адильжан** – Бронзовый медалист Республиканской Олимпиады.

Оргкомитет National Science Battles 2025

Увидимся на следующем турнире!